CAPITOLO 1
La modellazione delle strutture mediante Elementi Finiti

1.1 Introduzione

Ogni volta in cui si crea un modello si procede a una astrazione della realtà; si cerca cioè in sostanza di ricondursi a degli schemi noti e semplificati che possano dare una interpretazione della realtà stessa. Ad esempio la Scienza delle Costruzioni ci fornisce la soluzione analitica per il comportamento delle travi sottoposte all'azione di carichi. Tuttavia sappiamo che le relazioni di De Saint Venant valgono sotto almeno una ipotesi restrittiva: la trave deve essere un corpo monodimensionale, nel senso che le due dimensioni trasversali devono essere trascurabili rispetto allo sviluppo assiale. E questo rappresenta appunto un modello della realtà, una semplificazione che fornisce validissimi risultati in molti casi della tecnica.

Spesso tuttavia se ne abusa, estendendo arbitrariamente la validità di questo modello oltre i suoi limiti intrinseci e violando le ipotesi sotto le quali era stato originariamente creato.

Per valicare questo e altri confini, senza rischiare di approdare a risultati di calcolo inattendibili, si è reso necessario lo sviluppo di un metodo di validità generale, che soffrisse in misura più ridotta delle limitazioni imposte da ipotesi troppo restrittive e legate a casi particolari.

Va da sé che il metodo ideale sarebbe quello che consente di risolvere in forma analitica il sistema misto di equazioni algebriche e differenziali alle derivate parziali che descrivono il problema elastico (e che riportiamo sinteticamente nell'Appendice A). Tuttavia la soluzione analitica presenta delle difficoltà praticamente insormontabili, salvo casi particolari che, in quanto tali, vanificano il tentativo di generalizzazione.

Ecco allora nascere l'idea di sviluppare un metodo che potesse risolvere il sistema almeno in un dominio limitato nello spazio e dalla forma geometrica semplice: in questo modo, suddividendo il dominio di interesse, sicuramente più vasto e dalla geometria più articolata, in un numero opportuno di sottodomini semplici per i quali sia nota la soluzione, è possibile ottenere la soluzione del problema originale "riassemblando" adeguatamente i risultati parziali.

In tal modo il problema è stato discretizzato e la soluzione ottenuta è sicuramente una approssimazione della realtà, ma nei casi pratici dell'ingegneria questo risultato è più che soddisfacente.

I sottodomini in cui si discretizza il dominio di origine vengono chiamati Elementi Finiti.

Tuttavia anche risolvere il problema elastico all'interno di un singolo elemento non è cosa da poco. Per poter procedere è necessario introdurre una ulteriore approssimazione e imporre che lo spostamento di un generico punto all'interno dell'elemento sia una funzione (lineare, parabolica, bilineare, etc. in relazione alle caratteristiche dell'elemento) degli spostamenti di punti predefiniti (detti nodi) dell'elemento stesso. Tali relazioni vengono dette Funzioni di Forma. Queste non sono altro che delle equazioni che governano lo spostamento di tutti i punti all'interno dell'elemento, in relazione a come si muovono i nodi che fanno capo all'elemento stesso (nell'Appendice B è possibile trovare ulteriori dettagli sulle Funzioni di Forma, almeno per il regime di sforzo piano, e sull'impiego che ne fa il Metodo degli Elementi Finiti).

Da quanto detto, e da quanto riportato in Appendice A, risulta chiaro che dalla conoscenza delle componenti di spostamento dei nodi, che collegano tra loro gli elementi in cui è stata divisa la struttura, si può risalire agli stati deformativo e tensionale della struttura stessa. Il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) è quindi basato sul "metodo degli spostamenti", che viene insegnato nei corsi di Scienza delle Costruzioni per la risoluzione delle strutture iperstatiche; il solo risultato in uscita da un codice di calcolo FEM, a seguito della soluzione delle equazioni, è proprio il campo degli spostamenti nodali: tutte le altre grandezze vengono da qui derivate.

E allora, per poter analizzare una qualsivoglia struttura utilizzando il Metodo degli Elementi Finiti, è necessario procedere attraverso alcuni punti, indicati sommariamente nel seguito:

- individuazione del tipo di elemento da impiegare, in relazione alla geometria della struttura e al fenomeno che si vuole indagare
- divisione della struttura in un numero "adeguato" di elementi
- applicazione delle condizioni al contorno (vincoli e carichi)
- risoluzione delle equazioni che derivano dal modello
- interpretazione dei risultati

Ciascuna di queste fasi, più o meno a carico dell'utente, rappresenta una criticità e può vanificare tutte le altre.

Ad esempio una mesh con elementi di pessima "qualità numerica" metterà sicuramente in difficoltà l'algoritmo risolutivo, come avremo modo di vedere nel Capitolo 6, pregiudicando la validità dei risultati. Oppure un modello "perfetto" può essere sottoposto alla soluzione da parte di un codice scadente, generando risultati di scarsa qualità. Oppure ancora la non perfetta comprensione della fisica che sta alla base dei fenomeni che si vogliono indagare può portare alla realizzazione di un modello non corretto (tipo di elemento sbagliato, condizioni al contorno errate, descrizione del materiale inadeguata, etc.).

L'interpretazione dei risultati, poi, è la fase che maggiormente pone le proprie basi sulla preparazione dello strutturista. Non bisogna mai dimenticare, infatti, che l'elaboratore, e tutti i codici di calcolo su di esso implementati, sono solamente degli strumenti atti a gestire e manipolare equazioni e numeri. Solamente il giudizio ingegneristico dello strutturista può validare i risultati di un calcolo.

1.2 La modellazione con elementi 2D

Chiaramente l'elemento migliore è quello in grado di rappresentare qualsiasi stato tensionale e deformativo, nella sua generalità. Tuttavia esistono delle condizioni in cui i problemi possono essere ricondotti a casi più semplici, senza per questo perdere nell'accuratezza dei risultati. In virtù di questo fatto sono stati creati degli elementi finiti appositi (per maggiori dettagli si veda l'Appendice A)

In questo paragrafo ci concentreremo sulla realizzazione di modelli piani, nel senso che le equazioni che li governano sono quelle dei § A.5, A.6 e A.7.

In generale ricorrere alla semplificazione significa avere minori difficoltà nella realizzazione del modello (che si traduce in minori possibilità di errore), tempi di calcolo inferiori, dimensioni dei files più contenute. È quindi sempre auspicabile ricorrere a modelli piani, a patto ovviamente che la semplificazione sia lecita.

1.2.1 Lo stato di sforzo piano

Come si può vedere nel § A.5, uno stato di sforzo piano si manifesta quando:

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

Condizione sufficiente per avere $\sigma_{zz} = 0$ è che lo spessore (che si sviluppa nella direzione z) sia "piccolo" rispetto alle altre due dimensioni della struttura. Questo è il caso, ad esempio, delle lamiere.

Condizione sufficiente per avere τ_{yz} e $\tau_{xz} = 0$ è che la struttura sottile in questione non sia caricata con forze di taglio normali alla sua superficie. Da tutto ciò emerge che per poter modellare una struttura con elementi a stato di tensione piana è necessario che le forze che la sollecitano appartengano allo stesso piano in cui giace la struttura.

Un caso di stato di sforzo piano, ad esempio, è costituito da ingranaggi cilindrici a denti dritti, in cui lo spessore sia piccolo rispetto alle altre dimensioni.

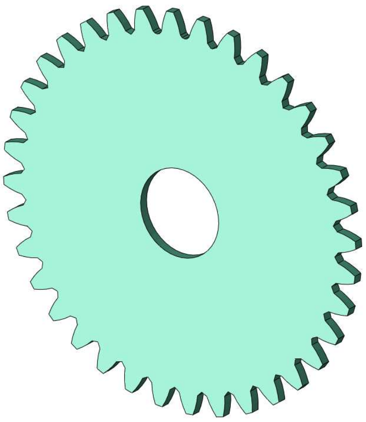

Figura 1.1. Ingranaggio a denti cilindrici. Spessore (fascia) = 3 mm, modulo = 3.2 mm, numero denti = 36, diametro primitivo = 115.2 mm.

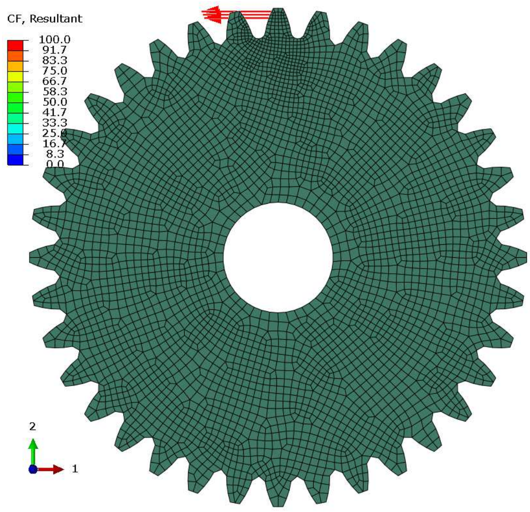

Figura 1.2. Modello a elementi finiti in stato di sforzo piano per l'ingranaggio della figura 1.1. Si osservi come il dente caricato sia stato diviso in un numero maggiore di elementi rispetto agli altri.

La figura 1.1 riporta il modello CAD 3D di una ruota dentata che soddisfa le ipotesi di stato di sforzo piano; la figura 1.2 illustra invece il corrispondente modello a elementi finiti. Da ultimo nella figura 1.3 rappresentiamo il plottaggio della tensione equivalente di Von Mises per il dente in presa.

Qui è stata riportata la tensione equivalente di Von Mises, ma è possibile richiedere qualsiasi grandezza, ad esempio le tensioni principali massima e minima, oppure la sollecitazione di scorrimento. Deve tuttavia essere chiaro che, qualora si richiedesse l'andamento della componente del tensore degli sforzi normale alla superficie dell'ingranaggio (σ_{zz}), si otterrebbe una colorazione uniforme e una scala cromatica piena di zeri. Sappiamo, infatti, che stiamo trattando uno stato di tensione piana.

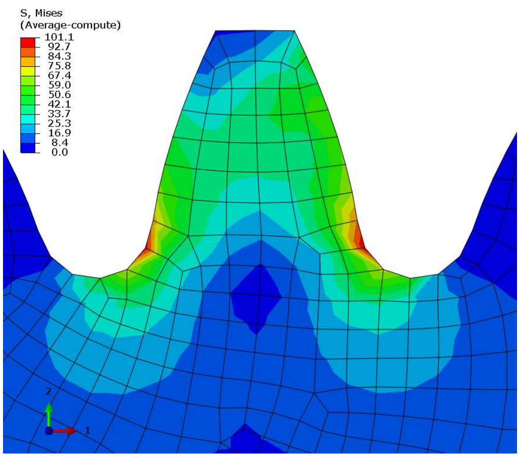

Figura 1.3. I risultati del calcolo. In questo caso è rappresentata la tensione equivalente di Von Mises (valore massimo pari a 101 MPa).

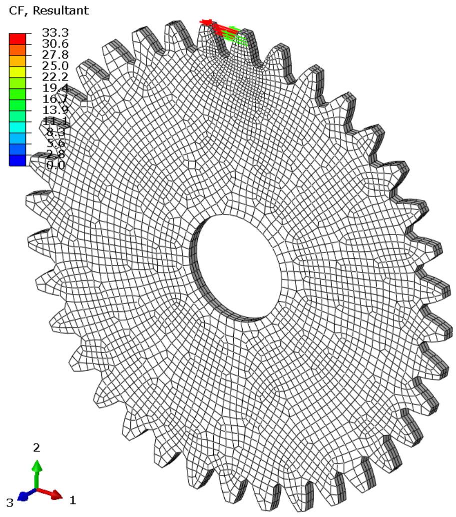

Figura 1.4. Modello a elementi finiti solidi per l'ingranaggio della figura 1.1.

Per procedere a un confronto realizziamo un modello a elementi solidi (validi per la modellazione di strutture 3D), che ci consente di riprodurre la geometria del pezzo più fedelmente. In questo modo possiamo comparare i risultati che otterremo dal modello più raffinato, ma più "pesante", con quelli del modello piano.

La figura 1.4 illustra il modello a elementi brick. Sono stati messi 3 elementi nello spessore, per cercare di cogliere anche la variazione della tensione σ_{zz}, cosa non possibile con il modello piano.

La figura 1.5 mostra l'andamento della tensione equivalente di Von Mises per il modello 3D, mentre la figura 1.6 riporta la sollecitazione σ_{zz}.

Le differenze nei risultati forniti dai due modelli sono inferiori al 2%, un errore assolutamente accettabile in tutti i casi della tecnica. Osserviamo poi che la tensione σ_{zz} appare decisamente trascurabile rispetto alle altre sollecitazioni in gioco. Questo ci conforta sulla validità dei risultati del modello a sforzo piano.

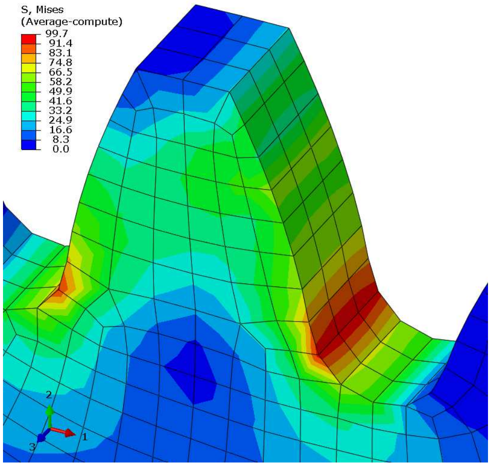

Figura 1.5. Tensione equivalente di Von Mises (valore massimo pari a 99.7 MPa).

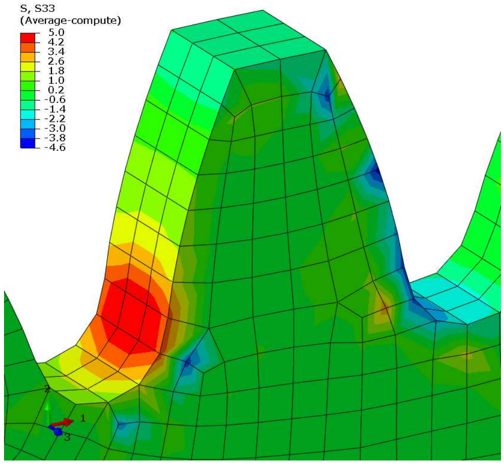

Figura 1.6. Tensione σ_{zz} (valore massimo pari a 5.0 MPa).

Osservazioni

A livello pratico realizzare un modello a sforzo piano significa indicare al codice di calcolo il tipo di elemento che si sta utilizzando (e in genere questa operazione viene fatta mediante il pre-processore grafico); occorre prestare attenzione perché molti programmi a elementi finiti richiedono che l'elemento giaccia in uno dei tre piani del sistema di riferimento globale (xy, yz o xz); chiaramente un errato posizionamento produrrà un messaggio di errore da parte del solutore. Dato poi che il modello piano non ha uno spessore fisico, al codice bisogna anche trasmettere questa ulteriore informazione.

Il modello piano risulta decisamente più compatto (303 KB per il file di input, 1460 KB per il file dei risultati) rispetto al suo "fratello maggiore" 3D (1435 KB il file di input, 5804 KB il file dei risultati); corrispondentemente anche i tempi di calcolo sono più ridotti. Anche se oggi la potenza degli elaboratori e le capacità delle memorie di massa non rappresentano più dei limiti, le semplificazioni riducono le possibilità di errore.

La mesh è stata infittita in corrispondenza del dente caricato; questo consente di cogliere adeguatamente i gradienti di deformazione e tensione, garantendo dei buoni risultati e al tempo stesso riducendo il numero di equazioni. Torneremo nel Capitolo 6 sull'importanza della densità della mesh.

Guardando la geometria dell'ingranaggio nella sua globalità e pensando a come questo tipo di organo lavora, si poteva evitare di modellare tutti i denti, limitandosi a realizzare il modello solo per i due o tre denti attigui a quello caricato. Questa sarebbe stata una ulteriore valida semplificazione.

La σ_{zz} della figura 1.6, poi, presenta alla base del dente segni opposti: dal lato caricato, in particolare, risulta negativa, mentre dal lato opposto essa è positiva; questo fatto non deve sorprendere in quanto il dente, sostanzialmente, lavora a flessione e quindi il lato caricato vedrà le fibre tese e il lato opposto risulterà compresso: ne consegue che dal lato teso il materiale tenderà a contrarsi (per effetto del coefficiente di

Poisson), generando una σ_{zz} negativa, mentre dal lato compresso tenderà a espandersi, generando una σ_{zz} positiva.

1.2.2 Lo stato di deformazione piana

Duale dello stato di sforzo piano è il regime di deformazione piana. Come si può vedere in Appendice A, uno stato di deformazione è piano quando:

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

In questo caso condizione necessaria per avere $\varepsilon_{zz} = 0$ è che la dimensione normale al piano in cui giace la struttura sia preponderante rispetto alle altre. Ad esempio se l'ingranaggio della figura 1.1 avesse una fascia di 15 mm anziché 3 mm si potrebbe già parlare di deformazione piana.

Analogamente a quanto avviene per lo stato di sforzo piano per avere $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ è necessario che la struttura sia caricata con forze che giacciono nel piano cui la struttura appartiene.

Le equazioni che governano il regime di deformazione piana sono quelle del § A.6. Osserviamo che in questo caso la componente σ_{zz} del tensore degli sforzi non è nulla, a causa del coefficiente di contrazione trasversale (vedere eq. A.13).

Come esempio in questo caso calcoleremo lo stato tensionale che nasce all'interno di un cilindro a grosso spessore e lungo, in una sezione lontana da flange o bordi che possano alterare il percorso dei carichi, quando al suo interno agisca una pressione p = 50 MPa.

La tensione in direzione tangenziale (σ_t) vale, in base alle formule del Lamé:

$$\sigma_t = p \cdot \frac{\left(\frac{D_e}{d}\right)^2 + 1}{a^2 - 1}$$

essendo D_e il diametro esterno, D_i il diametro interno, d il diametro generico, $a = \frac{D_e}{D_i}$.

Supponiamo che sia D_e = 200 mm, D_i = 100 mm. Con questi valori la tensione tangenziale, all'intradosso (d = 100) e all'estradosso (d = 200), vale:

$$\sigma_{ti} = 83 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{te} = 33 \text{ MPa}$$

Questi sono i valori analitici da confrontare con il calcolo numerico.