

gura 11.16), di fatto impedendo alla componente membranale di "manifestarsi", non essendoci il vincolo che può contrastarla. Con un calcolo lineare questo effetto viene ovviamente perso.

Attraverso un semplice esempio abbiamo messo in luce un aspetto importante del calcolo automatico delle strutture: in certe situazioni la possibilità di prendere in considerazione le non linearità di tipo geometrico può rendere valido un progetto strutturale che il calcolo lineare avrebbe scartato, mentre in altre circostanze non si ha alcuna utilità pratica nell'impiegare tecniche di calcolo non lineare, più raffinate e costose in termini di impegno delle risorse hardware.

Per poter stabilire a priori quale via intraprendere nell'affrontare il calcolo di una struttura è quindi necessaria l'esperienza dello strutturista. Da ultimo va detto che può convenire, qualora sia necessaria

una soluzione non lineare di tipo geometrico, ricorrere al "substructuring" (cfr. Capitolo 7). Molti codici oggi in commercio sono in grado di gestire i superelementi in maniera totalmente trasparente all'utente, creandoli all'interno di una analisi di tipo non lineare. Se abbiamo ad esempio una struttura che, per la sua conformazione geometrica e per le condizioni di carico cui è sottoposta, vede solamente una o più delle sue parti subire grandi spostamenti, possiamo pensare di inserire la parte che subisce piccoli spostamenti in un unico superelemento interno, lasciando all'esterno solamente la parte o le parti non lineari. In questo modo il codice di calcolo, una volta assemblata la matrice di rigidezza del superelemento (lineare) non la "tocca" più durante le iterazioni, che quindi saranno più rapide in quanto eseguite su un minore numero di gradi di libertà. È il codice di calcolo stesso, una volta giunto a convergenza, ad "espandere" i risultati anche al superelemento. La sola difficoltà per l'utente sta nel decidere quale parte verrà racchiusa nel superelemento e quale invece rimarrà fuori.

11.4 Il post-buckling

Giunti a questo punto siamo in grado di analizzare situazioni che possono portare le strutture a lavorare oltre il carico di instabilità elastica (post-buckling). Questo tipo di condizione viene in genere definita impropriamente "buckling non lineare", sottintendendo in tal modo che per indagare tale fenomeno è necessaria un'analisi non lineare con grandi spostamenti. Infatti generalmente il fenomeno è associato a non linearità di

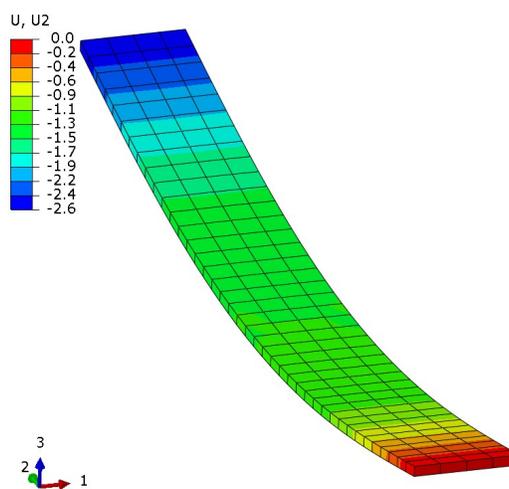


Figura 11.16. Calcolo non lineare con vincoli cerniera-carrello: spostamento in direzione longitudinale.

tipo geometrico, ma non è escluso che si possa avere anche la plasticizzazione di una o più zone e/o il contatto con altre parti della struttura.

11.4.1 Travetta in compressione

Per introdurre questo particolare problema strutturale ci serviremo ancora della travetta utilizzata per l'esempio precedente. Le caratteristiche geometriche sono quelle della figura 11.1, mentre le condizioni di vincolo vedono una cerniera a una estremità e un carrello a quella opposta. In tal modo si realizza la condizione riportata nella figura 11.17.

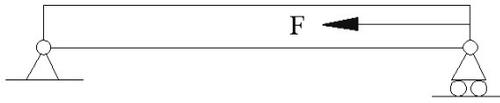


Figura 11.17. Condizioni di vincolo e di carico per la travetta.

Con queste ipotesi il carico critico di buckling vale (cfr. Capitolo 5):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{L^2} = 678 \text{ N}$$

Il calcolo a elementi finiti, condotto secondo le modalità indicate nel Capitolo 5 per il buckling lineare, fornisce un valore praticamente identico a quello sopra calcolato e quindi non ci soffermiamo ulteriormente sull'aspetto lineare. Per poter eseguire un'analisi di post buckling occorre innanzitutto effettuare uno step di calcolo per "suggerire" al codice quale sarà la deformata che la struttura tenderà ad assumere sotto carico.

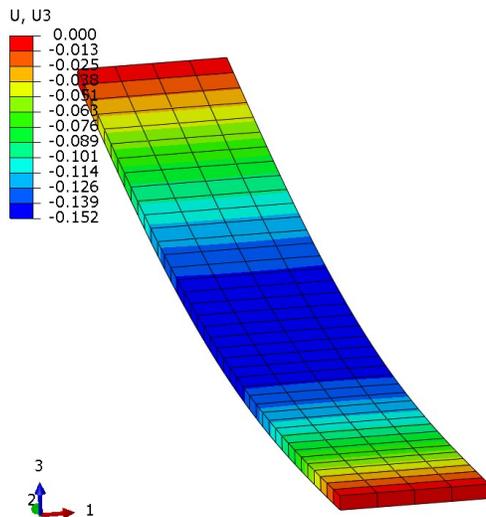


Figura 11.18. Travetta "predeformata". Qui è plotata la componente verticale dello spostamento (fattore di scala = 50).

Nel caso della nostra travetta sarà sufficiente applicare, ad esempio, un valore di pressione molto piccolo per far sì che la trave si infletta lievemente (nei casi in cui non sia semplice stabilire la forma del modo di buckling è sufficiente effettuare un calcolo di instabilità lineare elastica). Questo viene fatto perché altrimenti il fenomeno non può manifestarsi a livello numerico, in quanto il modello della struttura è "perfetto" e non potrebbe mai giungere al collasso. Una seconda precauzione consiste nell'applicare non una forza, bensì uno spostamento; questo perché la struttura, una volta instabilizzata, non può reagire a un carico superiore a quello critico. Se ad esempio nel nostro caso applicassimo una forza $F > P_{cr}$

la struttura risulterebbe labile e la soluzione non potrebbe giungere a convergenza. Viceversa imponendo lo spostamento “controllato” questo non succede. Comunque il discorso apparirà più chiaro una volta studiato l’esempio proposto. La figura 11.18 contiene la travetta “predeformata” da una pressione uniforme $p = 0.001$ MPa. Come si può osservare la freccia al centro della campata è di circa 0.15 mm.

A seguito dell’applicazione del carico di pressione viene imposto all’estremo non vincolato uno spostamento assiale di 1 mm tale da comprimere la travetta. Si ottiene la deformata della figura 11.19. Ora si può osservare una freccia a centro campata di quasi 9 mm. Chiaramente lo spostamento assiale dell’estremo non vincolato sarà pari a 1 mm. Da questi dati ancora non siamo in grado di capire se la travetta sia andata in buckling oppure no.

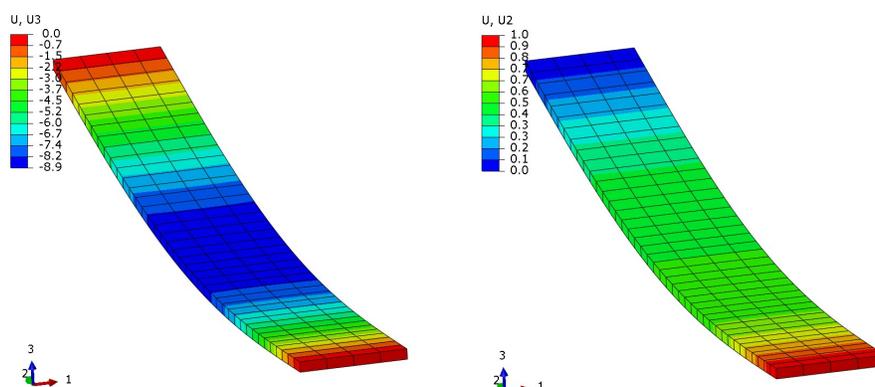


Figura 11.19. A sinistra: spostamenti in direzione z ; a destra: spostamento in direzione longitudinale (fattore di amplificazione della deformata = 1.0).

Possiamo dire che, in un’ipotesi di calcolo lineare, imporre uno spostamento di 1 mm alla travetta genera una deformazione $\varepsilon = 1/200 = 0.005$ a cui corrisponde una sollecitazione $\sigma = \varepsilon \cdot E = 1030$ MPa che in definitiva darebbe una forza $F = \sigma \cdot A = 41200$ N ossia ben oltre il carico critico della barretta. Ma cosa è accaduto nella realtà? Proviamo a graficare la reazione vincolare in direzione assiale in funzione dello spostamento imposto allo estremo libero. Otteniamo

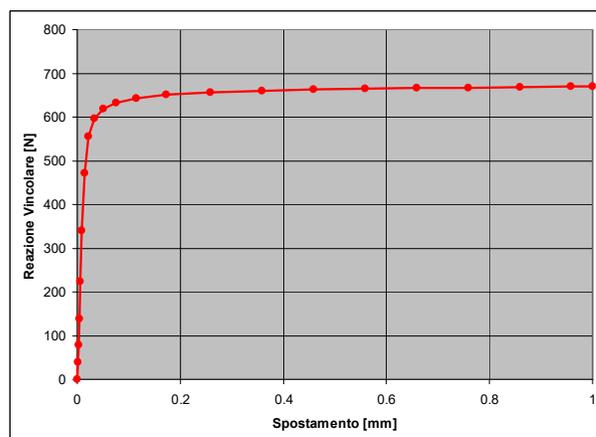


Figura 11.20. Reazione vincolare in direzione assiale plottata in funzione dello spostamento imposto all’estremo libero. È chiaramente distinguibile un asintoto.

la curva della figura 11.20.

Il valore della reazione alla fine dello step di carico è pari a 669.5 N, molto vicino a quello calcolato. Non deve sorprendere che questo numero sia più basso: noi abbiamo infatti “predeformato” la travetta per simulare un difetto di rettilinearità. Se eseguiamo un calcolo di buckling lineare sulla trave già deformata anche il valore determinato in principio tenderebbe a calare. Dobbiamo tuttavia osservare che la curva inizia a scostarsi dalla non linearità a un valore molto più basso, ossia già intorno a 550 N: possiamo quindi affermare che il calcolo lineare produce risultati non conservativi e che pertanto, se non si ricorre a un'analisi di post-buckling, è meglio tenere dei coefficienti di sicurezza elevati (almeno pari a 1.5, a meno di non ricorrere poi a delle prove fisiche).

La figura 11.21 infine contiene l'andamento della tensione in direzione longitudinale. Chiaramente esiste una sollecitazione di flessione, preponderante, oltre alla componente membranale:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{top}} + \sigma_{\text{bot}}}{2} = -16.6 \text{ MPa} \quad \sigma_f = \frac{\sigma_{\text{top}} - \sigma_{\text{bot}}}{2} = \pm 458 \text{ MPa}$$

Ovviamente la σ_m che abbiamo ottenuto dalla figura 11.21 è pari alla reazione vincolare (669.5 N) diviso per l'area della sezione (40 mm^2).

In ogni caso la sollecitazione è decisamente inferiore a quella, puramente membranale, che si avrebbe se la trave non si instabilizzasse (e pari a 1030 MPa, come visto).

S, S22
SNEG, (fraction = -1.0)
SPOS, (fraction = 1.0)
(Average-compute)

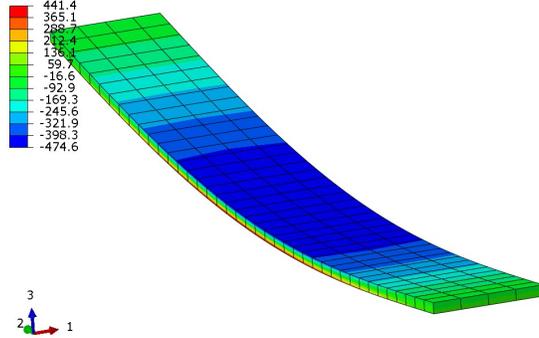


Figura 11.21. Stress in direzione longitudinale. Si ha un'importante componente flessionale contro una modesta componente membranale.

Osserviamo poi che, qualora il materiale lavori al di sotto del suo valore di snervamento, la rimozione del carico farebbe tornare la struttura nella sua condizione originaria. A questo punto è chiaro il motivo per cui in un calcolo di questo genere non si possa applicare tout court la forza a cui si suppone la struttura possa resistere: abbiamo infatti visto che la travetta era in grado di reagire solamente fino a un certo valore della forza F , anche se al suo estremo lo spostamento imposto continuava ad aumentare. Una forza “fuori controllo” non avrebbe portato alla convergenza della soluzione. E questo succede perché il carico applicato, essendo la struttura divenuta labile, non ha modo di “fluire” attraverso altre parti. Ricordiamo che una struttura labile ha una matrice di rigidezza non definita positiva e quindi, all'atto pratico, l'applicazione di una forza superiore al carico critico è assimilabile al tentativo di risolvere una struttura non vincolata. L'imposizione di uno spostamento, al contrario, implica l'applicazione di un vincolo

(in particolare di un vincolo sul grado di libertà divenuto labile) e questo si traduce (come riportato nell'Appendice B) nella eliminazione delle righe e delle colonne della matrice di rigidezza corrispondenti ai gradi di libertà vincolati (in realtà molti software utilizzano il "penalty method", che consiste nell'attribuire ai gradi di libertà vincolati delle rigidezze molto elevate anziché eliminare le corrispondenti righe e colonne; così facendo si ha il vantaggio di non dover partizionare la matrice per il calcolo delle reazioni vincolari, ma lo spostamento del grado di libertà vincolato non potrà mai essere "numericamente" zero). Questo è il motivo per cui con l'applicazione di un carico la soluzione della travetta in compressione non converge mentre imponendo lo spostamento all'estremo libero il calcolo ha un esito positivo. Se avessimo una struttura costituita da più componenti e uno di essi andasse in buckling non sarebbe detto che la struttura nel suo insieme giunga al collasso, come vedremo nel prossimo esempio, dove, proprio per questo motivo, anche con l'applicazione di una forza il calcolo converge.

11.4.2 Telaio piano

Supponiamo di avere il telaio piano riportato nella figura 11.22 attraverso il relativo modello a elementi finiti tipo beam. Da una prima analisi di buckling lineare troviamo che $F_{cr} = 10512$ N. Chiaramente l'elemento che si instabilizza è il diagonale A, come si può vedere dalla figura 11.23. Noi vogliamo vedere cosa accade alla struttura quando invece applichiamo una forza F quasi doppia: $F = 20000$ N.

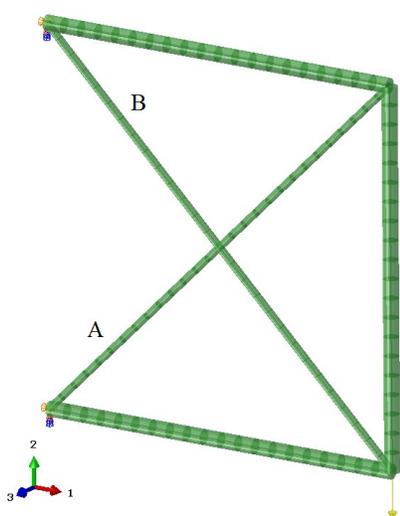


Figura 11.22. Telaio piano in acciaio. I lati del quadrato sono lunghi 500 mm; il diametro delle travi disposte lungo i lati è pari a 20 mm mentre il diametro dei due diagonali è di 10 mm. Gli elementi beam sono rappresentati con la loro effettiva geometria.

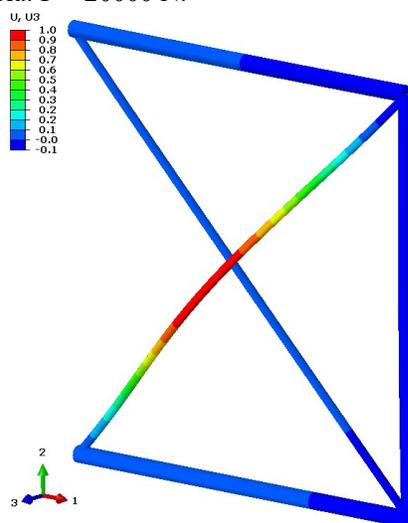


Figura 11.23. Risultati del calcolo lineare: il primo modo di buckling dice che il carico che instabilizza il diagonale A è pari a 10512 N (fattore di amplificazione = 50).