sul pezzo in questione rimarranno tensioni e deformazioni residue. Tuttavia il materiale si assesta su un nuovo limite elastico, cioè per ottenere un aumento dell'area plasticizzata occorre incrementare ulteriormente il carico. È possibile osservare questo fatto studiando la figura 13.20, dove si riporta schematicamente il diagramma $\sigma - \varepsilon$ per un materiale con comportamento bilineare. In questo caso si parla di "incrudimento isotropico" e il materiale non presenta l'effetto Bauschinger, nel senso che, applicando una compressione a seguito di una trazione a σ_{Sn1} (vedere figura 13.20), il materiale snerverà a compressione quando $\sigma = - \sigma_{Sn1}$. Questo è il modello usato più frequentemente quando si implementano analisi strutturali con non linearità di materiale.

In genere poi i codici di calcolo oggi in commercio consentono all'utente di definire la curva $\sigma - \varepsilon$ per punti, dando in questo modo la possibilità di rappresentare leggi costitutive anche assai articolate, come vedremo più avanti.

Nel § 13.1 abbiamo accennato alla possibilità di sfruttare questo effetto per aumentare il limite di snervamento del materiale, a patto di poter gestire in qualche modo le deformazioni residue; infatti dalla figura 13.20 appare chiaro che $\sigma_{Sn2} > \sigma_{Sn1} > \sigma_{Sn}$: se le lavorazioni finali del componente (diciamo un semiasse, ossia un cilindro) sono eseguite a posteriori delle operazioni di pre-stress, allora le deformazioni permanenti vengono "annullate", per così dire. Chiaramente con questa operazione si avvicina il limite elastico al limite di rottura, di fatto rendendo il componente meno resiliente, ossia più fragile.

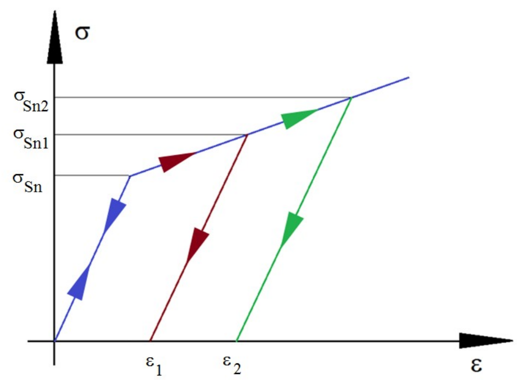

Figura 13.20. Diagramma σ–ε per un materiale dal comportamento bilineare. Una volta raggiunto il valore σ_{Sn1} sopra il limite elastico, allo scarico il provino presenta una deformazione residua ε_1. A questo punto qualsiasi carico al di sotto di σ_{Sn1} fa lavorare il materiale in modo elastico, ma la deformazione ε_1 rimane. Superando σ_{Sn1} si ha un incremento delle deformazioni residue.

13.4 Trave in torsione oltre il limite elastico

E visto che abbiamo parlato di sezioni circolari, un discorso analogo a quello fatto per una trave sottoposta a un puro momento flettente può essere ripetuto per una trave soggetta a pura torsione. Per semplificare il calcolo teorico utilizzeremo una barra a sezione circolare piena con diametro d = 40 mm e di lunghezza L = 100 mm (in realtà la lunghezza non ha molta importanza, in quanto la sollecitazione dipende esclusivamente dal diametro e dalla coppia applicata). La figura 13.21 riporta il modello realizzato con elementi brick a 8 nodi di un quarto della barra. La struttura è doppiamente simmetrica, ma il carico non lo è. È pertanto indispensabile applicare, ai nodi giacenti nei piani di simmetria, dei vincoli di antisimmetria (cfr. Capitolo 2). La superficie a un'estremità della trave viene incastrata a terra, mentre all'altra estremità viene applicata la coppia (un quarto del valore totale, visto che stiamo analizzando un quarto di struttura!) attraverso una raggiera di elementi MPC di tipo rigido. Come per il caso della flessione, attraverso le relazioni della Scienza delle Costruzioni siamo in grado di calcolare qual è il momento torcente che porta le fibre del mantello a snervare. Se supponiamo di impiegare lo stesso materiale usato in precedenza (ossia con σ_{Sn} pari a 290 MPa) sappiamo che la corrispondente tensione di scorrimento vale (è facile ricavare la seguente relazione pensando all'equazione di Von Mises, che lega le σ e le τ):

$$\tau_{Sn} = \frac{\sigma_{Sn}}{\sqrt{3}} = 167.4\,\text{MPa}$$

Pertanto, essendo $\tau = \dfrac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3}$, è immediato ricavare M_t = 2104007 Nmm.

Accantoniamo per il momento questo valore. Ci servirà più avanti per calcolare il margine plastico a torsione per una sezione circolare piena.

Ora, come nel caso della flessione, calcoliamo l'entità del momento torcente che fa plasticizzare una corona circolare di spessore 10 mm. In altre parole il nocciolo di diametro d_1 = 20 mm continuerà a lavorare in campo elastico, mentre la corona esterna sarà totalmente plasticizzata. Avremo la situazione riportata nella figura 13.22.

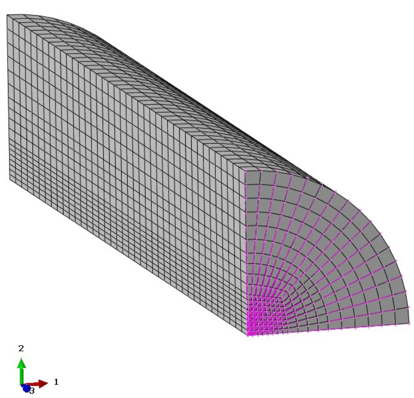

Figura 13.21. Modello di un quarto di barra sottoposta a pura torsione. Sono stati applicati gli opportuni vincoli di antisimmetria.

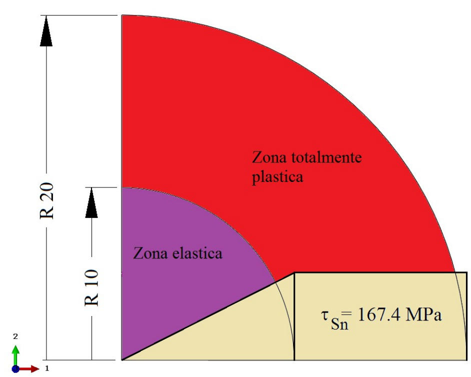

Figura 13.22. Distribuzione delle tensioni di scorrimento.

Una volta determinato il valore di questa coppia lo applicheremo al modello a elementi finiti.

Tenendo presente la figura 13.22 e sapendo che le τ agiscono su areole elementari $da = r \cdot d\vartheta \cdot dr$ potremo scrivere:

$$M_{tpl} = \frac{\pi \cdot d_1^3 \cdot \tau_{Sn}}{16} + \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r} \tau_{Sn} \cdot r \cdot da \qquad (13.1)$$

Svolgendo l'integrale doppio e le altre operazioni si ricava:

$$M_{tpl} = 2710671 \text{ Nmm}$$

La figura 13.23 riporta il contour della sollecitazione di scorrimento e il suo andamento in funzione del raggio (lungo la linea indicata) quando viene applicato il momento torcente appena calcolato. La sollecitazione di scorrimento è espressa in un sistema di riferimento cilindrico con origine nel centro della barra e con l'asse z diretto come l'asse della barra stessa. In particolare la τ plottata è la τ_{23}, che rappresenta la $\tau_{z\theta}$.

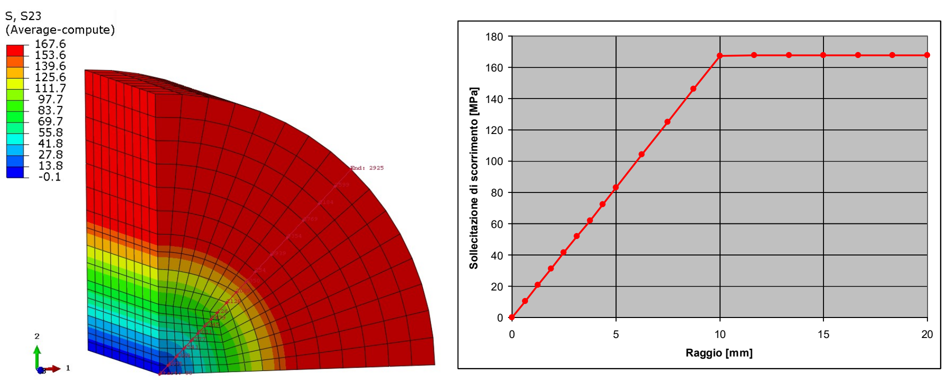

Figura 13.23. Sollecitazione di scorrimento. Dato che non esistono altre componenti di sollecitazione, anche in questo caso (come per la trave inflessa con il modello plane stress) è possibile studiare direttamente la tensione di scorrimento perché questa sarà la sola a contribuire alla sollecitazione di Von Mises.

Da ultimo la figura 13.24 riporta le informazioni relative alle tensioni di scorrimento residue, una volta che il momento torcente sia stato "rilasciato" in uno step di carico successivo.

A questo punto, come fatto nel caso della flessione, possiamo calcolare il coefficiente di collaborazione plastica. Per fare ciò è necessario determinare il momento torcente che plasticizza il 100% della sezione. È possibile fare questo utilizzando la (13.1), tenendo presente che il primo termine (che rappresenta la distribuzione triangolare delle sollecitazioni) sarà nullo e che gli estremi di integrazione lungo il raggio saranno diversi.

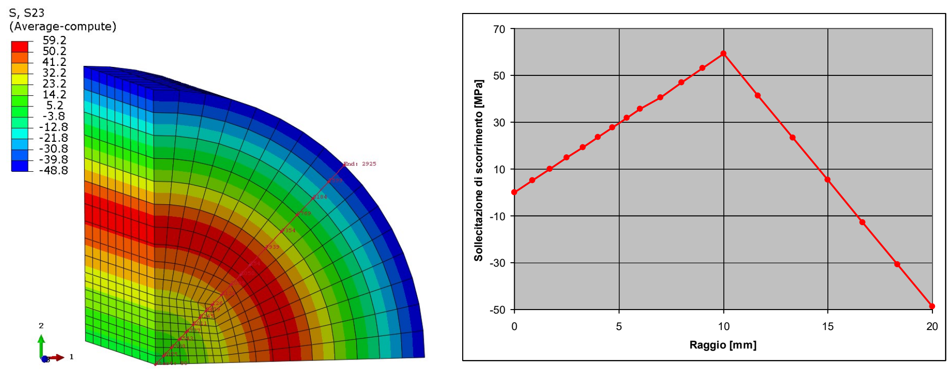

Figura 13.24. Sollecitazione di scorrimento residua.

Avremo:

$$M_{tpl100\%} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \tau_{Sn} \cdot r \cdot da$$

Svolgendo l'integrale doppio si ottiene $M_{tpl100\%} = \dfrac{\tau_{Sn} \cdot \pi \cdot d^3}{12} = 2798112\,\text{Nmm}$.

Il coefficiente di collaborazione plastica a torsione per la sezione circolare vale pertanto:

$$C_{plt} = \frac{M_{tpl100\%}}{M_t} = \frac{2798112}{2098584} = 1.\overline{33}$$

Tale valore è identico a quello teorico [1]. In questo caso, purtroppo, il calcolo per la plasticizzazione totale fallisce anche se si applica una rotazione invece di una coppia; il problema risiede negli elementi più esterni che subiscono una deformazione troppo elevata e impediscono alla soluzione di giungere a convergenza.

13.5 La pratica industriale

13.5.1 Semiasse per vettura da competizione

Nei paragrafi precedenti abbiamo più volte accennato a un semiasse per vettura da competizione. Vediamo quindi quali sono i vantaggi del pre-plasticizzare un tale componente. Nella figura 13.25 riportiamo una porzione di 120° del modello, inoltre tagliato con un piano in corrispondenza della mezzeria; avremo quindi necessità di in-