

14.2.7 Conclusioni

Da quanto riportato nei paragrafi precedenti appare difficile giudicare a priori quale metodo sia meglio utilizzare, visti i pregi e i difetti di ciascuno. Tuttavia alcune indicazioni di carattere generale possono essere date.

- Se il modello del sistema da analizzare non è eccessivamente grande conviene ricorrere al metodo dell'integrazione diretta, così da poter evitare l'analisi modale, soprattutto se ci si aspetta di avere parecchi modi all'interno del range di frequenze che si vanno ad analizzare.
- Viceversa se il modello è di dimensioni considerevoli è consigliabile ricorrere al metodo della sovrapposizione modale; in questo caso ricordarsi di controllare le masse modali effettive e di prendere un numero di modi che dia una massa modale effettiva pari almeno all'85% della massa totale (il discorso vale per masse e per momenti di inerzia), anche se appena più sopra abbiamo visto che anche con l'81% abbiamo avuto una risposta corretta (assumendo che la soluzione più corretta sia quella data dall'integrazione diretta); sottolineiamo però che questo era un caso decisamente semplice, con una struttura unica e sollecitata solamente in una direzione.
- Se la forzante ha una ben precisa frequenza conviene sempre utilizzare il metodo dell'integrazione diretta, evitando in tal modo la scelta del numero di modi che dovrebbero intervenire nella sovrapposizione modale. Inoltre, in questa ipotesi, sarebbe perfino inutile un'analisi modale in quanto lo studio della risposta in frequenza risulta già sufficiente.
- Infine va detto che sono abbastanza rari i casi in cui una struttura lavora nell'intorno di una risonanza; anzi, generalmente si tende a fare in modo di essere abbastanza lontani dalle frequenze proprie del sistema. Esistono però casi decisamente particolari, come quello della giunzione di parti in plastica effettuata mediante ultrasuoni, dove un elemento, detto "sonotrodo", vibra alla sua frequenza di risonanza e, posto a contatto con la zona di unione, fonde localmente i materiali creando la saldatura.
- A parte i casi particolari come quello appena citato, potrebbe comunque capitare che nel transitorio, ossia in quella fase in cui la forzante raggiunge la sua frequenza di esercizio (si pensi a un compressore centrifugo che lavora a una ben precisa velocità, ma chiaramente vedrà degli avvii e degli spegnimenti), si vada a eccitare alcune frequenze lontane da quella di funzionamento; ecco allora che può valere la pena vedere cosa succede in queste fasi ricorrendo al calcolo della risposta nel tempo (time history).

14.3 L'analisi dinamica transitoria

Questo è il caso più generale di risposta dinamica. L'equazione da risolvere è sempre la (14.1), ma in questo caso $\{F(t)\}$ può variare comunque nel tempo, seguendo una storia che può anche essere di tipo casuale (random), come avviene per i sismi e le sollecitazioni del vento per le strutture civili o per le forzanti indotte dall'irregolarità del manto stradale, come avviene per i veicoli terrestri (per queste situazioni, tuttavia, si

usano metodi diversi, cui accenneremo più avanti). Anche in questo caso si possono utilizzare le due tecniche di soluzione viste in precedenza per l'analisi armonica con le stesse considerazioni riportate poco più sopra. La sola differenza, peraltro non così piccola, riguarda il fatto che se è necessario tenere conto di non linearità geometriche, di contatto o di materiale il solo metodo utilizzabile è quello dell'integrazione diretta.

Per poter descrivere la forzante F in funzione del tempo t generalmente i codici di calcolo mettono a disposizione un sistema di tipo tabellare che consente di descrivere l'input per punti. Spesso poi queste informazioni arrivano da altri codici di calcolo (ad esempio multibody, vedere Capitolo 18) o da misurazioni sperimentali.

In questo paragrafo vogliamo mettere in evidenza la motivazione per cui, a volte, può convenire effettuare un'analisi dinamica transitoria invece di un'analisi statica classica con la quale troppo spesso si tende a semplificare i fenomeni in modo eccessivo. Per fare ciò consideriamo ancora la trave usata in questo Capitolo, ma questa volta con solo un estremo incastrato a terra e con l'altro libero, come illustrato nella figura 14.12.

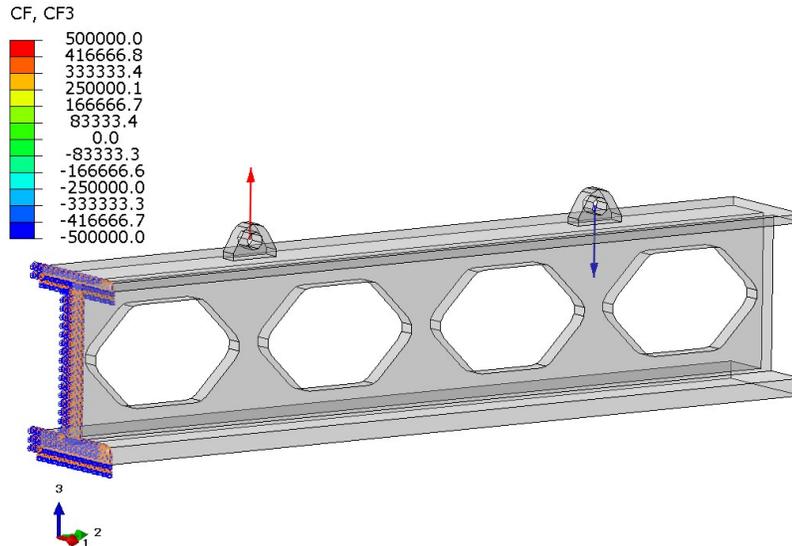


Figura 14.12. Trave incastrata a un estremo e caricata con due forze opposte.

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, applichiamo agli anelli due forze verticali e di segno opposto pari a 0.5 MN secondo l'andamento temporale riportato nella figura 14.13. Come si vede, le forze crescono da zero al valore massimo in 1/100 di secondo, restano applicate per 1/100 di secondo e poi nello stesso tempo si annullano nuovamente: un fenomeno velocemente variabile nel tempo, quindi.

Essendo cambiate le condizioni di vincolo, anche le frequenze proprie e i modi di vibrare della trave saranno cambiati. Pertanto, se volessimo seguire l'approccio della sovrapposizione modale dovremmo eseguire una nuova analisi modale, controllare le masse modali effettive e stabilire se il numero di modi estratti sia sufficiente oppure se occorra ripetere il calcolo con più modi. Seguiamo comunque entrambe le strade.

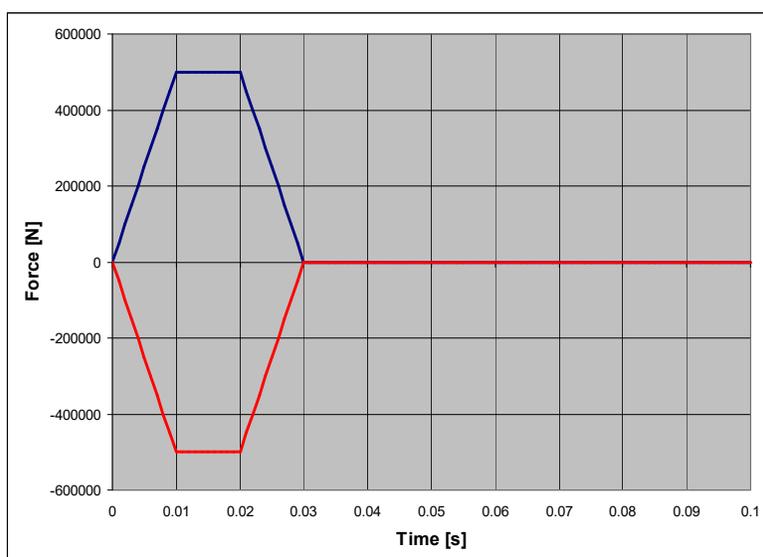


Figura 14.13. Andamento temporale delle forze applicate alla trave.

14.3.1 Integrazione diretta

Il primo quesito che ci si presenta riguarda il valore da attribuire al passo temporale usato per integrare le (14.1) con metodi numerici; una regola empirica è quella di usare un Δt pari a 1/100 del tempo totale per il quale si vuole seguire il fenomeno (sottolineiamo che qui facciamo riferimento solamente al metodo implicito: per il metodo esplicito valgono infatti regole diverse, come vedremo più avanti). Volendo vedere cosa accade al sistema in un 1/10 di secondo, useremo un Δt pari a 0.001 s. Va detto poi che, solitamente, i codici di calcolo adattano il passo a seconda della velocità di convergenza della soluzione, cercando di aumentarlo il più possibile per ridurre i tempi di calcolo; occorre però prestare attenzione, perché potrebbero andare "persi" alcuni picchi di cui il codice non può rendersi conto: per questo motivo è buona pratica anche porre un limite sopra il quale è bene che il programma non vada.

Infine, se la storia temporale della forzante avesse un andamento particolarmente "dinamico", il passo temporale deve essere tale da poterlo seguire adeguatamente. Ad esempio, la storia della figura 14.14 dura circa 0.5 s e quindi, in base alla regola empirica citata, un time step pari a 0.005 s dovrebbe andare bene, ma ci rendiamo conto che con un passo del genere non si riuscirebbe a seguire la forzante in maniera adeguata.

In questi casi, una volta stabilito il passo da usare, sarebbe opportuno eseguire il calcolo su un modello semplificato che, al limite estremo può contenere solamente i nodi, vincolati a terra, a cui la forza è applicata e delle masse puntuali attaccate a quei nodi; questo unicamente con lo scopo di verificare se, con il passo scelto, si riesce a riprodurre la storia temporale della forzante.

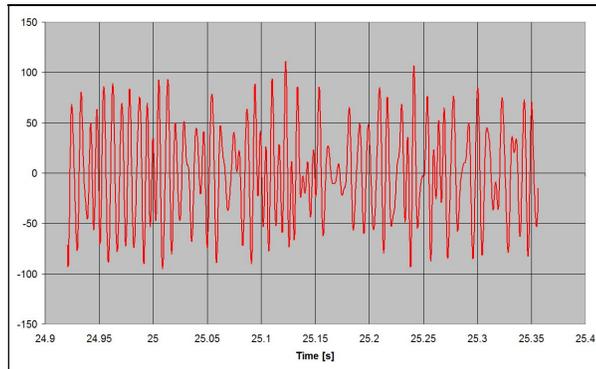


Figura 14.14. Forzante con andamento rapidamente variabile.

aiuta a individuare eventuali picchi di risposta in risonanza e a concentrarsi attorno a quell'istante di tempo analizzando le grandezze di interesse (stress, spostamenti, reazioni vincolari). Il nostro esempio, ancora una volta, è molto semplice e ci aspettiamo di trovare i valori massimi di tutte le grandezze nell'intorno del massimo delle forze.

Il nostro esempio è molto semplice e di conseguenza un passo di 0.001 s è più che adeguato.

Una volta terminato il calcolo, l'analisi dei risultati è un po' più articolata della risposta in frequenza e certamente più di una statica, principalmente perché non si sa né dove né quando si ha, ad esempio, il massimo valore dello stress equivalente di Von Mises. Guardare l'animazione della time history

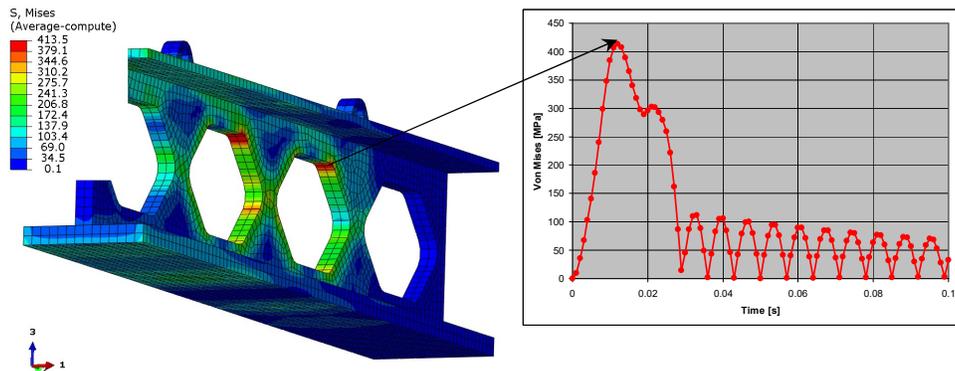


Figura 14.15. Contour dello stress di Von Mises e andamento temporale dello stesso nel punto di massimo.

E così è: la figura 14.15 illustra il contour della tensione equivalente di Von Mises nell'istante di valore massimo (0.012 s, cioè 0.02 s più tardi rispetto al momento in cui le forze raggiungono il loro massimo) e l'andamento nel tempo della tensione di Von Mises per il punto dove si trova il massimo.

Se facciamo la stessa cosa per lo spostamento verticale di un punto a metà dell'anima all'estremità libera otteniamo i risultati della figura 14.16.

Riassumendo:

| | |
|-------------------------------|----------|
| Spostamento verticale minimo: | -7.46 mm |
| Stress massimo di Von Mises: | 414 MPa |

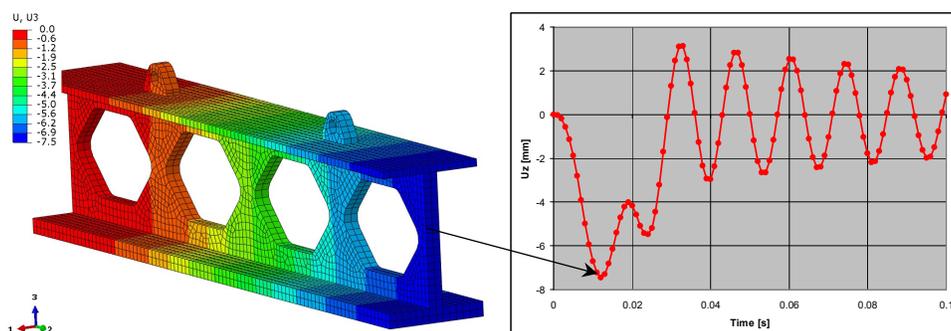


Figura 14.16. Contour dello spostamento in direzione verticale e andamento temporale dello stesso nel punto di minimo.

14.3.2 Sovrapposizione modale

Come prima cosa eseguiamo l'analisi modale; visto che nel caso della trave incastata a entrambe le estremità (cfr § 14.2) 10 modi erano risultati sufficienti, iniziamo considerando 10 modi. La tabella 14.4, analogamente alla 14.1, contiene le relative masse modali effettive e la percentuale della massa totale in ogni direzione. Osserviamo che in direzione z, in cui ci aspettiamo il massimo della risposta, la percentuale è maggiore dell'85% indicato come valore minimo; dovremmo quindi ottenere una risposta molto simile a quella ottenuta con l'integrazione diretta. Vediamo. Anche nel caso della sovrapposizione modale occorre indicare un time step e anche in questo caso valgono sia la regola empirica sia le considerazioni espresse poco più sopra. Scegliamo quindi un passo pari a 0.001 s e procediamo con il calcolo. Nella figura 14.17 riportiamo gli andamenti temporali dello spostamento e della tensione equivalente di Von Mises per gli stessi nodi usati nel caso dell'integrazione diretta e li sovrapponiamo proprio a questi ultimi per un confronto più immediato.

| MODE | X-COMPONENT | Y-COMPONENT | Z-COMPONENT | X-ROTATION | Y-ROTATION | Z-ROTATION |
|-------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|
| 1 | 4.507E-01 | 4.133E-28 | 1.238E-27 | 2.215E-21 | 1.665E+04 | 1.505E+06 |
| 2 | 3.542E-03 | 5.845E-28 | 2.939E-26 | 1.004E-19 | 2.227E+04 | 1.323E+04 |
| 3 | 7.255E-28 | 1.605E-05 | 5.170E-01 | 1.588E+06 | 3.232E+02 | 1.003E-02 |
| 4 | 1.223E-01 | 6.581E-29 | 1.655E-28 | 4.429E-22 | 6.693E+03 | 3.852E+04 |
| 5 | 6.255E-25 | 8.838E-05 | 1.191E-01 | 4.462E+03 | 7.445E+01 | 5.524E-02 |
| 6 | 1.017E-02 | 4.464E-27 | 5.188E-24 | 1.201E-19 | 2.864E+02 | 3.967E+03 |
| 7 | 1.002E-02 | 8.873E-28 | 3.578E-26 | 1.936E-21 | 3.815E+03 | 3.268E+03 |
| 8 | 1.079E-03 | 4.144E-28 | 2.247E-27 | 3.991E-21 | 4.416E+00 | 5.536E+02 |
| 9 | 5.669E-23 | 5.963E-04 | 2.535E-02 | 3.113E+03 | 1.584E+01 | 3.727E-01 |
| 10 | 1.348E-02 | 1.210E-22 | 2.640E-22 | 4.167E-17 | 3.496E+02 | 2.033E+03 |
| TOTAL | 6.113E-01 | 7.008E-04 | 6.615E-01 | 1.596E+06 | 5.048E+04 | 1.566E+06 |
| % | 82.5% | 0.1% | 89.3% | 98.2% | 82.4% | 99.4% |

Tabella 14.4. Masse modali effettive per i primi 10 modi. La somma in direzione z è pari all'89% della massa totale.