

## **CAPITOLO 2**

### **La modellazione delle condizioni al contorno**

#### **2.1 Introduzione**

Una volta realizzato il modello a elementi finiti è necessario imporre le opportune condizioni di vincolo e di carico; le condizioni al contorno indicano al programma di calcolo i punti in cui sono applicate le forze esterne e dove queste sono reagite.

L'applicazione dei vincoli è generalmente più "spinosa" rispetto alla applicazione dei carichi: infatti un modello vincolato in maniera errata può rendere impossibile la soluzione del sistema di equazioni. È necessario, come vedremo fra breve, fare in modo che la distribuzione dei vincoli sia tale per cui la struttura risulti non labile; questo significa che tutti gli atti di moto rigido devono essere impediti, sia per il modello completo, sia per una parte di modello rispetto all'altra (eliminazione dei meccanismi interni).

Inoltre i vari tipi di elemento di cui abbiamo parlato nel Capitolo 1 presentano ai loro nodi diversi gradi di libertà (g.d.l.): ad esempio l'elemento 3D brick ha solo i 3 g.d.l. traslazionali, mentre l'elemento shell ne presenta 6, avendo anche i 3 g.d.l. rotazionali. Per cui, a stretto rigore di logica, in un modello a brick sarebbe necessario bloccare tutti i g.d.l. rotazionali; tuttavia molti codici di calcolo provvedono ad imporre i vincoli in maniera automatica quando "leggono" che a determinati nodi fanno capo elementi senza rigidità in alcuni g.d.l. Torneremo su questo aspetto anche nel Capitolo 6.

#### **2.2 Le condizioni di vincolo**

Abbiamo detto che una corretta applicazione delle condizioni di vincolo deve innanzi tutto fare in modo che la struttura risulti non labile: questo significa che qualsiasi tipo di meccanismo deve essere eliminato, altrimenti la matrice di rigidità che ne risulta è non definita positiva e pertanto il problema non è risolvibile numericamente. Un esempio abbastanza classico è rappresentato dai modelli a elementi solidi. Se ad esempio si vincolano tutti i nodi di uno spigolo nei sei gradi di libertà si può essere convinti di avere realizzato un incastro, ma così non è; infatti, come accennavamo poco più sopra, gli elementi solidi non hanno rigidità rotazionali e pertanto non sono in grado di reagire con dei momenti concentrati. Il risultato è una cerniera cilindrica, con conseguente labilità. In genere questo tipo di errore non è molto pericoloso perché i codici di calcolo, se non escono con un messaggio di errore, quantomeno avvisano l'utente che delle rigidità arbitrarie sono state aggiunte per rendere la matrice definita positiva e per proseguire poi nella soluzione dell'equazione matriciale. Sarà cura dello strutturista capire cosa ha generato il problema.



riportato nella figura 2.3. Si osservi come ora, a parte delle “sporchie” di tipo numerico, si abbia effettivamente un valore nullo per questa componente della sollecitazione. Bisogna sottolineare che il caso più corretto è il primo, perché nella realtà la seconda distribuzione di vincoli è difficilmente ottenibile, mentre una saldatura, ad esempio, è ben rappresentata dalla prima condizione.

Si potrebbe obiettare che, essendo il carico applicato lungo l'asse della trave, non dovrebbe comunque essere necessario vincolare nemmeno uno dei g.d.l. trasversali; similmente a quanto detto sul sistema di forze autoequilibrate, anche in questo caso il codice dovrebbe comunque invertire una matrice non definita positiva e questo non è possibile. Ribadiamo quindi che, al minimo, è sempre necessario applicare un sistema di vincoli isostatici non labile.

Forse è inutile evidenziare che con un modello a elementi trave questo effetto relativo alla tensione trasversale non nulla in prossimità del vincolo non si manifesta.

Tutto questo per evidenziare il fatto che, al di là della possibile introduzione di labilità all'interno del modello, porre attenzione nell'applicazione dei vincoli significa anche pensare all'effetto che questi possono avere sulla struttura, sulle sue deformazioni e sui suoi stati tensionali; anche se, generalmente, nei punti di discontinuità si tende a non prendere per validi i valori di tensione prodotti da un modello a elementi finiti.

Quanto appena affermato vale anche perché molto frequentemente i vincoli vengono applicati al nodo centrale di elementi MPC, sia per rappresentare vincoli "sensati", sia perché l'estrazione della reazione vincolare, essendo concentrata in un solo punto, è immediata; ad esempio, se non si usassero gli MPC per vincolare il braccio sospensione riportato in figura 2.4, sarebbe da un lato impossibile simulare il vincolo tipo cerniera sferica e dall'altro sarebbe più complesso estrarre la reazione vincolare.

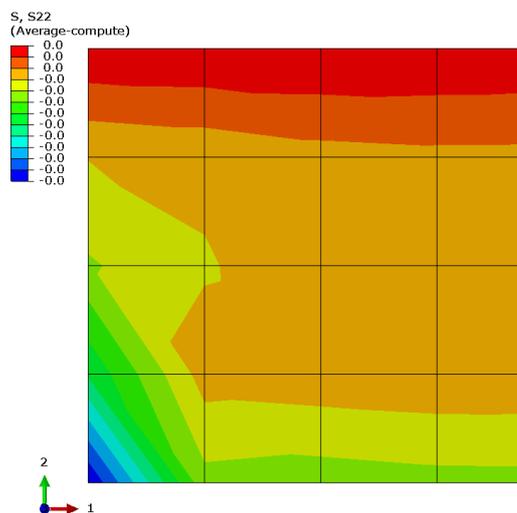


Figura 2.3. Andamento della tensione verticale quando è stata modificata la distribuzione dei vincoli. Ora il valore lungo tutto il dominio è ingegneristicamente nullo.

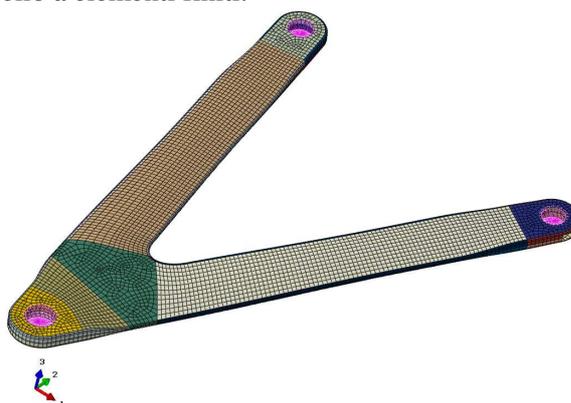


Figura 2.4. Braccio sospensione per vettura da competizione: le raggiere di MPC (color fucsia nella figura) sono utilizzate per applicare vincoli (cerniere sferiche) puntuali e carichi concentrati.

È chiaro che non solo è indispensabile applicare delle condizioni di vincolo formalmente corrette, ma è anche necessario far sì che ciò che si sta modellando abbia un riscontro fisico; se ad esempio un organo è vincolato mediante bulloni, la modellazione del vincolo deve lasciare libera la rotazione attorno all'asse della vite.

Va detto poi che generalmente i codici di calcolo, dietro richiesta, forniscono i valori delle reazioni vincolari nei g.d.l. vincolati; queste informazioni sono preziosissime, sia per il calcolo dei collegamenti, come si accennava nel Capitolo 1, sia per verificare la corretta applicazione dei carichi: infatti i codici solitamente forniscono anche la risultante delle reazioni vincolari che, unitamente alla risultante dei carichi applicati, consente appunto questo controllo. Non solo, ma se le due risultanti sono diverse (chiaro, oltre lievi differenze di tipo numerico) significa che qualche forza o momento può essere "andato perso" a causa di errori numerici; torneremo comunque su questo discorso nel Capitolo 9, quando parleremo dei metodi di validazione dei modelli.

Un ultimo aspetto cui accenniamo brevemente riguarda i vincoli unilateri: un tipico esempio sono gli appoggi. Purtroppo non esiste un modo "semplice" per realizzare dei vincoli unilateri; infatti le condizioni di vincolo si limitano a rendere "non attivo" uno o più g.d.l., mentre il vincolo unilatero deve mantenere attivo oppure no il g.d.l., al quale è applicato, a seconda della direzione in cui questo si sta muovendo. E questo richiede delle tecniche di tipo iterativo proprie del calcolo non lineare.

## 2.3 Le condizioni di carico

### 2.3.1 I carichi puntuali

Le condizioni di carico rappresentano il caso duale delle condizioni di vincolo; infatti, dove sono noti gli spostamenti (nodi vincolati) sono incognite le forze (reazioni vincolari), mentre dove sono note le forze (nodi caricati) sono incogniti gli spostamenti. Per quanto riguarda l'applicazione dei carichi è praticamente impossibile creare situazioni che possano generare errori di tipo numerico. I soli errori che si possono commettere sono quelli concettuali; ad esempio, come per il caso dei vincoli, applicare un momento concentrato in un nodo che appartiene a elementi solidi è sbagliato (e non è detto che il codice di calcolo produca un messaggio di avvertimento) per quanto detto più sopra.

Un altro esempio che produce risultati apparentemente inaspettati è costituito dalla applicazione di una forza divisa per il numero di nodi che costituisce il tratto interessato dalla condizione di carico. Prendiamo ancora la trave della figura 2.1 e carichiamola con una forza assiale  $F = 1000$  N. Il tratto verticale sia diviso in quattro elementi (e quindi cinque nodi); la prima cosa che viene in mente di fare è di applicare su ogni nodo una forza  $f = 200$  N. La figura 2.5 riporta la deformata della trave nella zona di applicazione del carico; è possibile osservare come i nodi all'intradosso e all'estradosso si deformino più di quelli interni. Questo succede perché in tali posizioni esiste solo un elemento sul quale la forza nodale si scarica, mentre per i nodi intermedi gli elementi interessati sono due. Per ovviare a questo problema è sufficiente ap-