

È poi chiaro che, nel caso degli elementi shell, oltre ad avere possibili errori legati alla orientazione degli elementi come visto nel § 3.3, c'è anche il rischio di ribaltare un elemento, dando luogo a un'anomalia tra facce top e bottom, ottenendo i risultati della figura 3.11 per le facce top. La discontinuità appare in tutta la sua evidenza: lungo la fila di elementi con sollecitazione di trazione pari a 827 MPa esiste un elemento ribaltato che presenta il corretto valore assoluto per la tensione, ma di compressione anziché di trazione. Contrariamente a quanto avviene per le orientazioni discordanti viste al § 3.3,

in questo caso non è possibile "correggere" la rappresentazione grafica semplicemente scegliendo un sistema di riferimento diverso, perché top e bottom sono associati all'elemento e alla sua definizione. Un contour mediato nei nodi, come visto, avrebbe leggermente nascosto questo effetto, rendendone l'individuazione più difficoltosa.

Oltre al regime flessionale per gli elementi shell esiste anche il regime membranale; lo stato di sollecitazione a esso associato viene visualizzato plottando la tensione nel piano medio degli elementi (detta superficie middle). In questo caso, data la mancanza di carichi con componente parallela al piano della lamiera, il regime membranale non esiste e la piastra lavora in pura flessione. Vale la pena evidenziare il fatto che, qualora fossimo in presenza di grandi deformazioni, il calcolo dovrebbe essere di tipo non lineare e in questo caso, a seconda delle condizioni di vincolo, potrebbero nascere delle componenti membranali, come vedremo nel Capitolo 11.

### 3.4.2 Intersezioni tra elementi su piani diversi

Vediamo, attraverso un altro esempio, un ulteriore problema che si può riscontrare nella post-processazione dei risultati su modelli a elementi shell: consideriamo la trave a doppio T riportata nella figura 3.12 attraverso il suo modello a elementi finiti tipo shell; nella figura sono anche contenute le dimensioni della sezione. La trave è incastrata a una estremità e caricata all'altra estremità da una forza verticale  $F = 10000$  N che la sottopone a flessione e taglio.

Dato che la forza giace nel piano dell'anima, l'anima lavorerà esclusivamente in regime membranale, mentre le due piattabande vedranno sia il contributo membranale, preponderante, sia quello flessionale. Per evitare di dover trattare con sovrasollecitazioni locali dovute alla discontinuità causata dai vincoli, ci concentreremo sull'analisi dei risultati nella sezione di mezzeria.

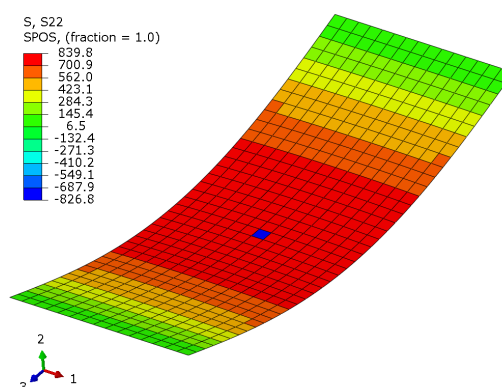


Figura 3.11. Andamento della tensione (non mediata) in direzione longitudinale. È possibile osservare la discontinuità imputabile al ribaltamento di un elemento rispetto agli altri.

Cominciamo con le tensioni generate dalla flessione, andando a determinare i valori degli sforzi nei punti indicati nella figura 3.13, dapprima con i metodi della Scienza delle Costruzioni e poi attraverso il modello a elementi finiti.

$$\sigma_A = \frac{M_{fmez.}}{I} \cdot \frac{h_A}{2} = 161.8 \text{ MPa} \quad \sigma_B = \sigma_C = \frac{M_{fmez.}}{I} \cdot \frac{h_B}{2} = 152.1 \text{ MPa}$$

essendo:

$$M_{fmez.} = F \cdot \frac{L}{2} = 2500000 \text{ Nmm} \quad I = 772366 \text{ mm}^4$$

$$h_A = 100 \text{ mm} \quad h_B = 97 \text{ mm}$$

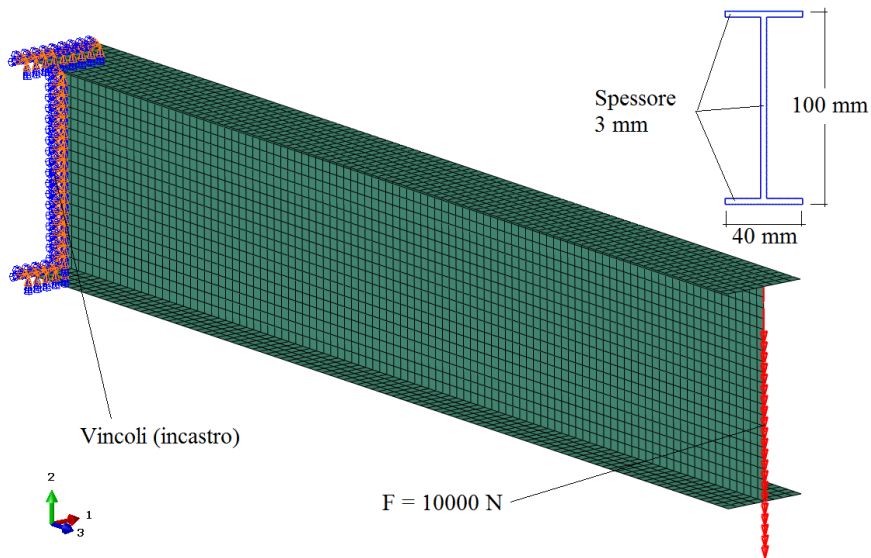


Figura 3.12. La trave ha una lunghezza  $L = 500 \text{ mm}$ . Gli elementi shell giacciono nei piani medi di anima e piattabanda.

Nella figura 3.14 riportiamo l'andamento della tensione longitudinale per le facce top che, nel caso della piattabanda superiore, è il valore da confrontare con  $\sigma_A$ , mentre nella figura 3.15 è illustrata la distribuzione della sollecitazione longitudinale per le facce bottom, da paragonare chiaramente con  $\sigma_B$  e  $\sigma_C$ .

In entrambi i casi l'errore commesso è molto piccolo, intorno all'1÷2%.

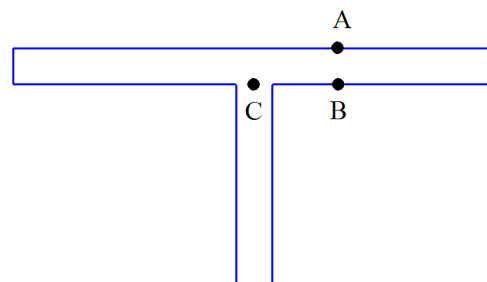


Figura 3.13. Punti di indagine dello stato tensionale indotto dalla flessione.

Osserviamo che mentre nel caso teorico  $\sigma_B$  e  $\sigma_C$  coincidono in quanto la distanza dall'asse neutro è uguale in entrambe le condizioni, nel modello a elementi finiti esiste una differenza, piccola ma comunque apprezzabile.

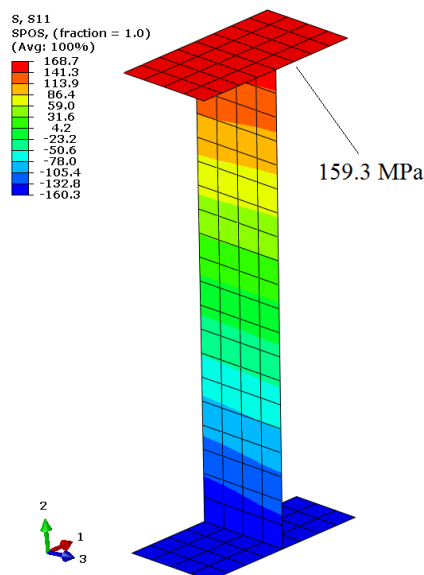


Figura 3.14. Tensione longitudinale nella mezzeria della trave: facce top.

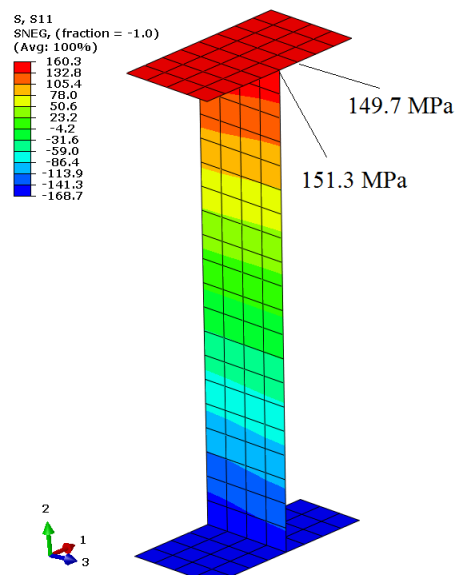


Figura 3.15. Tensione longitudinale nella mezzeria della trave: facce bottom.

Questo succede perché nel punto C del modello la tensione, mediata, tiene conto anche del contributo dell'elemento dell'anima che si intesta sulla piattabanda. Ma perché il valore è più alto? Indagando nei risultati numerici (ad esempio clickando con il mouse su un plottaggio non mediato) si osserva che negli elementi della piattabanda in corrispondenza dell'intersezione con l'anima si ha esattamente lo stesso valore che si ottiene per  $\sigma_B$ , come illustrato nella figura 3.16. Quindi, dato che la media è più alta, il responsabile non può che essere l'elemento dell'anima; infatti, osservando la figura 3.16, si vede che in tale elemento la tensione vale 154.4 MPa. Ricordiamo che i modelli a elementi shell, generalmente, vengono costruiti adagiando gli elementi nel piano medio delle superfici; in questo esempio, quindi, l'anima non ha un'altezza di  $(100 - 2 \cdot 3) = 94$  mm ma  $(100 - 2 \cdot 1.5) = 97$  mm. Pertanto il modello "coglie", nell'anima, una tensione pari a:

$$\sigma_{\text{CFEM}} = \frac{M_{\text{fmez}}}{I} \cdot \frac{97}{2} = 156.9 \text{ MPa}$$

con un errore ancora intorno all'1.5% rispetto al valore teorico, ma in linea con quanto trovato per gli altri due punti lontani dall'intersezione con l'anima.

Questo effetto è tanto più marcato quanto più alti sono gli spessori, anche se in un modello realizzato a shell proprio gli spessori non dovrebbero essere troppo elevati ri-

petto alle altre dimensioni della struttura. In questo semplice caso è facile capire che il valore corretto da prendere è quello dato dagli elementi della piattabanda, mentre altre volte discriminare potrebbe essere più difficile.

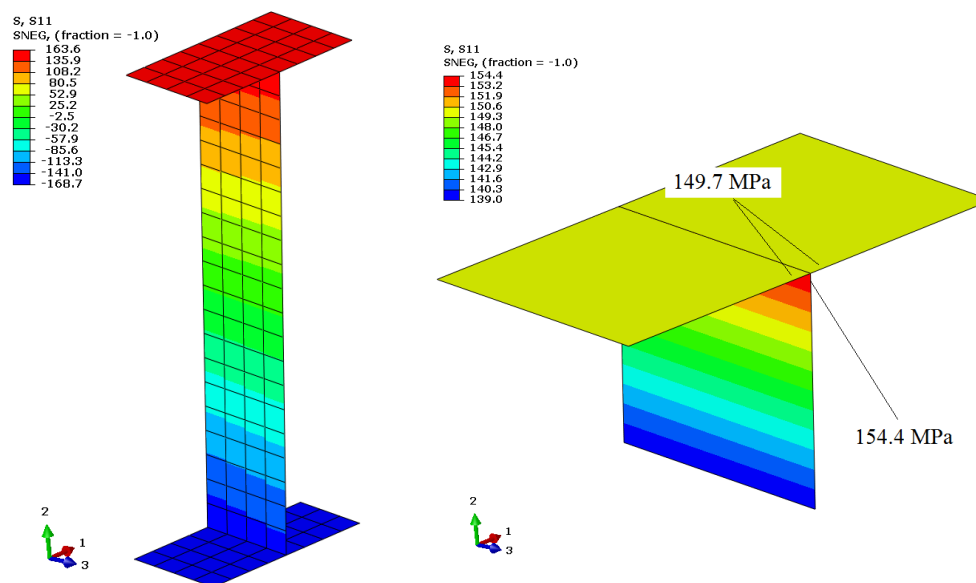


Figura 3.16. Tensione longitudinale (non mediata) nella mezzeria della trave: facce bottom. È riportato anche un ingrandimento con i valori, nel nodo di interfaccia, della tensione negli elementi di piattabanda e anima.

Passiamo ora alle sollecitazioni generate dal taglio. L'azione tagliante è costante lungo l'asse della trave, perciò potremmo analizzare una sezione qualsiasi (a parte quella vincolata per i già citati problemi di discontinuità); ci concentreremo quindi sulla sezione in mezzeria.

La Scienza delle Costruzioni ci dice che la massima tensione di scorrimento si trova in corrispondenza dell'asse baricentrico e vale:

$$\tau_{\max} = \frac{F \cdot S^*}{I \cdot b} = -39.4 \text{ MPa}$$

essendo  $S^* = 9132.4 \text{ mm}^3$  il momento statico, per la cui definizione si rimanda ai testi di Scienza delle Costruzioni, e  $b = 3 \text{ mm}$  lo spessore dell'anima.

Sappiamo poi che le  $\tau$  non sono nulle nella piattabanda, ma possono essere calcolate con la medesima formula, sostituendo gli opportuni valori di  $S^*$  e di  $b$ . Ad esempio nelle piattabande e a 15 mm dal bordo, si ottiene un valore pari a  $\pm 9.4 \text{ MPa}$  (il segno dipende da quale parte dell'anima ci si trova).

Nella figura 3.17 è riportato l'andamento della tensione di scorrimento nella sezione di mezzeria. In corrispondenza dell'asse baricentrico il valore che si registra nel modello è pari a  $-39.2 \text{ MPa}$ , mentre nelle piattabande è pari a  $\pm 9.3 \text{ MPa}$ ; in entrambe le

locazioni i valori praticamente coincidono con la teoria, come può rilevarsi dalla figura 3.17.

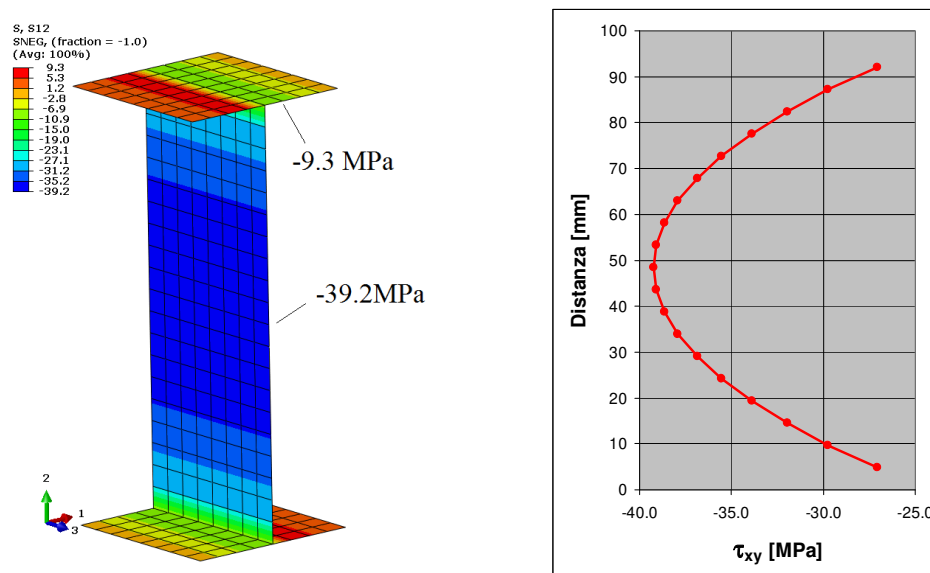


Figura 3.17. Andamento della tensione di scorrimento. Sia nell'anima sia nelle piattabande l'accordo con la teoria è decisamente buono. Nella parte destra si riporta l'andamento della tensione di scorrimento lungo l'anima che, come sappiamo, è parabolico.

Spendiamo ancora due parole su questo esempio, in particolare sullo stato di sforzo membranale, ossia quello relativo al piano medio degli elementi shell. Abbiamo detto che l'anima lavora in regime puramente membranale, esattamente come la trave della figura 3.1, mentre le piattabande avranno anche un minimo contributo flessionale. Il valore dello stress membranale può essere calcolato come la media degli stress alle facce top e bottom; possiamo pertanto determinarlo a partire dalle figure 3.14 e 3.15 (per un punto a metà strada tra A e B - cfr. figura 3.13) come:

$$\sigma_{\text{mem}} = \frac{159.3 + 149.7}{2} = 154.5 \text{ MPa}$$

Osserviamo che il contributo flessionale vale quindi  $\pm 4.8$  MPa.

La figura 3.18 riporta l'andamento della tensione longitudinale valutata nel piano medio, che rappresenta appunto il regime membranale.

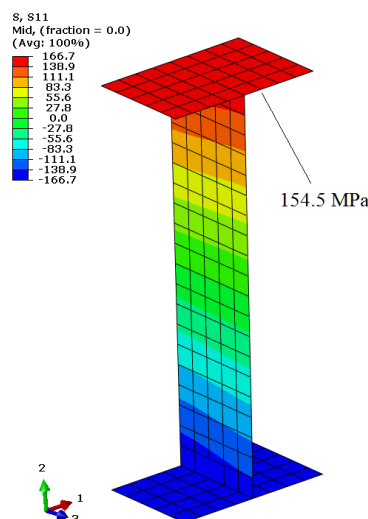


Figura 3.18. Andamento della tensione longitudinale nel piano medio.