

Con questo tipo di rappresentazione alcuni post-processor forniscono, clickando con il mouse, non solo il valore della grandezza ma anche i suoi coseni direttori nel punto in esame, in modo da saperne la direzione anche numericamente; conoscendo la direzione della tensione principale massima si è in grado di predire in quale direzione partirà un'eventuale cricca innescata da fenomeni affaticanti, come avremo modo di vedere nel Capitolo 10. Chiaramente questo tipo di plottaggio può essere applicato solo a grandezze vettoriali o tensoriali.

### 3.9.3 L'effetto imbuto

Vediamo ora un esempio dove la post-processazione grafica può trarre in inganno. Si voglia calcolare l'angolo di rotazione che subisce l'estremità di un tubo sottoposto all'azione di un momento torcente. Il calcolo manuale non presenta alcuna difficoltà e la Scienza delle Costruzioni ci fornisce la seguente relazione per il numero cercato:

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J_p}$$

essendo:

$M_t$  il momento torcente applicato;

$L$  la lunghezza del tubo;

$G$  il modulo di elasticità tangenziale per il materiale che costituisce il tubo;

$J_p$  il momento di inerzia polare del tubo.

In questo caso non siamo interessati ai valori e al relativo confronto con il caso teorico; semplicemente vogliamo vedere cosa un post-processore grafico plotta quando sia stato realizzato un modello che riproduca questa condizione.

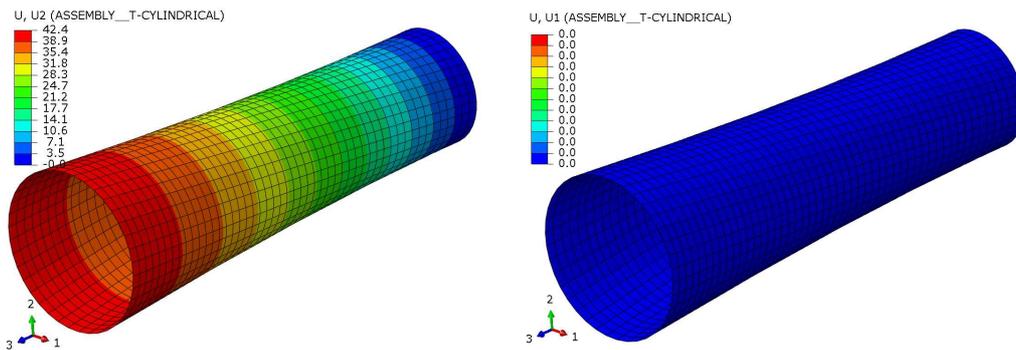


Figura 3.46. Effetto di apertura “a imbuto” per un tubo circolare sottoposto a una coppia torcente: a sinistra lo spostamento circonferenziale, a destra quello radiale.

La figura 3.46 illustra il contour degli spostamenti nelle direzioni circonferenziale e radiale rispettivamente di un sistema di riferimento cilindrico (con origine sull'asse del tubo) sulla grafica della deformata non amplificata. Al di là dei valori numerici

(che come abbiamo anticipato non ci interessano), l'effetto di apertura "a imbuto" non è assolutamente realistico e non è giustificabile in alcun modo dal punto di vista strutturale.

Non si tratta di densità di mesh né di tipo di elemento, aspetti che, come vedremo nel Capitolo 6, hanno un'influenza sull'accuratezza dei risultati. Con mesh più o meno rada, o impiegando elementi solidi, otterremmo gli stessi risultati qualitativi. Non solo; dalla deformata della figura 3.46 si potrebbe essere indotti a pensare che esista una componente radiale di spostamento, ma come si può vedere dall'immagine a destra della figura, essa risulta pari a zero, come deve essere. E allora come si giustifica la deformata della figura 3.46? La spiegazione è molto più semplice di quanto si potrebbe pensare e risiede nel fatto che il calcolo è lineare: in questa ipotesi deformata e indeformata coincidono, nel senso che si suppone che gli spostamenti siano talmente piccoli da non alterare in maniera sensibile la geometria del pezzo. Nel nostro caso questa "linearizzazione" si traduce nel confondere la tangente con il corrispondente arco; il post-processor, quando deve plottare la deformata di una struttura, non fa altro che sommare alle coordinate dei nodi le corrispondenti componenti di spostamento per poi ridisegnare gli elementi sulle nuove coordinate così ottenute. Nel nostro esempio, esistendo solo componenti circonferenziali di spostamento, i vari nodi, potendo spostarsi solo lungo la tangente per quanto detto poc'anzi, verranno a trovarsi su una circonferenza più grande, come appare chiaramente guardando la figura 3.47.

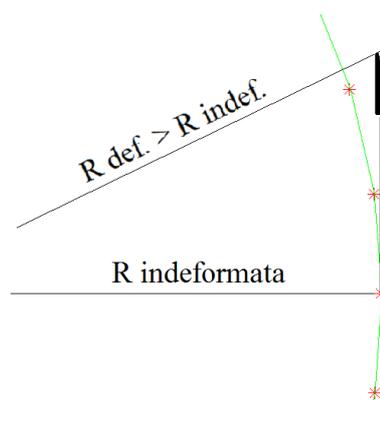


Figura 3.47. La circonferenza su cui si trovano i nodi a seguito dello spostamento, nell'ipotesi di piccole deformazioni, ha un raggio maggiore di quella indeformata.

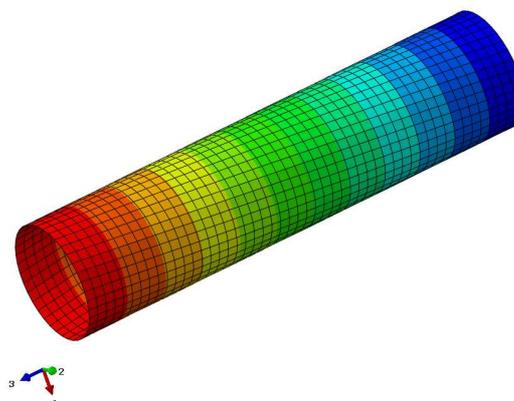


Figura 3.48. In un'analisi non lineare i nodi seguono la traiettoria corretta.

Ovviamente questo effetto è via via più marcato man mano che dalla base incastrata ci si sposta verso l'estremo in cui è applicata la coppia, perché la rotazione  $\theta$ , e quindi lo spostamento tangenziale, è proporzionale alla lunghezza; ecco quindi giustificato l'effetto "a imbuto".

Questo è sicuramente un problema di tipo "estetico"; tuttavia occorre prestare attenzione perché in casi meno semplici si potrebbe prendere per valido il plottaggio di un comportamento deformativo che non ha nulla a che fare con la realtà. Soprattutto oggi

che alla semplice grafica statica si sono affiancate anche delle animazioni talmente suggestive che inducono a ritenere che non possano contenere errori.

Da ultimo riportiamo nella figura 3.48 la deformata del tubo nel caso in cui si sia condotta un'analisi non lineare di tipo geometrico (grandi deformazioni, cfr. Capitolo 11); in questa ipotesi l'arco non viene più confuso con la tangente e i nodi seguono la traiettoria che dovrebbero seguire.

### 3.9.4 Strain energy

Uno strumento di una certa utilità è poi costituito dal plottaggio della “strain energy”, letteralmente “energia di deformazione”. Anche questa grandezza in passato, come ovviamente era per gli stress, veniva semplicemente tabulata elemento per elemento, mentre ora l'impatto visivo offerto può essere di grande aiuto allo strutturista per individuare rapidamente le zone di intervento, ad esempio per irrigidire o alleggerire una data struttura.

Come il termine stesso suggerisce, l'energia di deformazione è l'energia elastica che un organo immagazzina a seguito della deformazione che esso stesso subisce a causa dei carichi che lo sollecitano; chiaramente questa energia è anche uguale al lavoro delle forze esterne. Per un elemento la cui matrice di rigidezza sia  $[K]$  (cfr. Appendice B) l'energia di deformazione viene calcolata nel seguente modo:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\}$$

essendo  $\{u\}$  il vettore degli spostamenti dei nodi dell'elemento in questione. Una volta risolto il modello a elementi finiti sono noti gli spostamenti di tutti i nodi della struttura ed è quindi possibile calcolare l'energia di deformazione di ogni singolo elemento. Inutile dire che la somma delle energie di tutti gli elementi deve essere uguale all'energia calcolata attraverso la matrice di rigidezza globale e il vettore che contiene tutti gli spostamenti di tutti i nodi. Un plottaggio dell'energia di deformazione consente, quindi, di vedere quali sono le zone che “lavorano” di più e quali meno; in sostanza attraverso questa informazione è possibile stabilire dove aggiungere materiale per ridurre sollecitazioni e deformazioni e dove invece magari si può alleggerire la struttura.

Spesso si fa poi riferimento alla densità di energia di deformazione, cioè all'energia immagazzinata per unità di volume. La figura 3.49 illustra un esempio di energia di deformazione totale (a sinistra) e la densità di energia di deformazione (a destra) per la piastra forata sottoposta a flessione. Dato che qui lo spessore è costante, i due grafici forniscono la stessa informazione; nel caso di strutture più complesse, dove possono aversi variazioni di spessore, la densità di energia di deformazione è uno strumento migliore nella valutazione delle zone in cui intervenire con maggiore efficienza.

Osserviamo da ultimo che l'energia di deformazione è, chiaramente, una grandezza scalare e, per come viene calcolata, è costante su tutto l'elemento. Un plottaggio mediato nei nodi, quindi, tende a smussare eventuali grosse differenze tra un elemento e l'altro.