CAPITOLO 6
Gli errori nel calcolo a Elementi Finiti

6.1 Introduzione

Fino a qui abbiamo visto come "maneggiare" un modello a elementi finiti e come gestire i risultati che questo produce. Tuttavia questi numeri sono ampiamente influenzati dal modo in cui viene costruito il modello e dalla qualità numerica con cui vengono risolte le equazioni che il modello genera.

È chiaro che vale il principio del "trash in-trash out", cioè se l'input contiene degli errori non ci si può aspettare che l'output sia corretto.

Gli errori a cui è soggetta un'analisi numerica sono molteplici: si va dagli errori grossolani dell'utente (ad esempio descrizione del materiale sbagliata) a quelli legati al software che si usa per la costruzione del modello, dagli errori propri del metodo (che, lo ricordiamo, approssima la soluzione) agli errori di natura numerica.

Nei prossimi paragrafi di questo Capitolo ci occuperemo di tutti questi tipi di errore, evidenziando i pericoli, laddove possibile, attraverso semplici esempi illustrativi.

6.2 Gli errori dell'utente

Questo tipo di errore è forse il più difficile da gestire perché ha a che fare con la singolarità di ogni individuo e pertanto risulta imprevedibile.

Tuttavia esistono dei casi classici, legati alla necessità di introdurre dei numeri nel modello; oggi infatti si è abituati a lavorare con i sistemi grafici e gli input "da tastiera" necessari sono davvero pochi. Così, a volte, può capitare di digitare scorrettamente dei semplici numeri; ad esempio si può sbagliare nell'inserire il valore del modulo di Young per il materiale che costituisce la struttura da calcolare; si possono sbagliare i valori di forze e/o pressioni, delle temperature e via discorrendo.

Un errore più concettuale, ma sempre legato all'input di tipo numerico, è quello basato sulle unità di misura: i codici di calcolo dovrebbero tutti essere "unitless", ossia la coerenza del sistema adottato dovrebbe essere sotto la responsabilità dell'utente. Se ad esempio si utilizza il Sistema Internazionale (S.I.) non si sbaglia, ma si richiede che le dimensioni lineari siano espresse in metri e questo a volte (soprattutto in ambito meccanico) è un problema per i numeri piccoli (si pensi alle coordinate dei nodi) che ne derivano. Spesso allora si ricorre a sistemi "ibridi" per poter gestire agevolmente la geometria del modello, ma occorre prestare attenzione ai tipi di analisi per i quali questo modello viene impiegato. Esempio classico è l'uso del S.I. "modificato" utilizzando i millimetri al posto dei metri; le altre grandezze coinvolte sono le forze (in Newton), le masse (in chilogrammi), il tempo (in secondi). Per le analisi statiche di solito non ci sono problemi: il modulo di Young viene espresso in MPa, come le pressioni, la densità dei materiali viene introdotta in chilogrammi per millimetro cubo.

Apparentemente tutto funziona, perché anche la massa totale (che il codice calcola come densità per il volume totale) fornisce un valore corretto. Tuttavia se lo stesso modello viene impiegato anche per un'analisi dinamica (senza arrivare a cose complicate è sufficiente pensare al calcolo delle frequenze proprie) ecco che i risultati che si ottengono sono "scalati" di un certo fattore. Vediamo perché. Restando all'esempio del calcolo dei modi propri, la relazione che fornisce la frequenza di oscillazione di un sistema massa-molla con massa M e rigidezza K è:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Usando il S.I. avremmo che le dimensioni di K e M sarebbero rispettivamente [N/m] e [kg]. Passando alle unità base avremo (ricordiamo che $1\ N = \frac{1\ kg \cdot m}{s^2}$):

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{m}\right]}{[kg]}} = \left[\frac{1}{s}\right]$$

Con il S.I. modificato, invece, le dimensioni di K sono [N/mm] e quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{mm}\right]}{[kg]}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{kg \cdot 1000 mm}{s^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{mm}\right]}{[kg]}} = 10 \cdot \sqrt{10}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Ecco allora che la frequenza calcolata risulta falsata rispetto a quella reale (in particolare è più bassa di quella effettiva). Per mettere a posto le cose è sufficiente esprimere le masse in tonnellate (e cioè le densità in tonnellate per millimetro cubo). Infatti:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{mm}\right]}{[t]}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{kg \cdot 1000 mm}{s^2}\right] \cdot \left[\frac{1}{mm}\right]}{1000[kg]}} = \left[\frac{1}{s}\right]$$

In questo caso bisogna però ricordarsi che la massa totale fornita dal modello sarà in tonnellate e non più in chilogrammi. Non solo; se per caso il modello fosse sottoposto, per l'analisi statica, a carichi inerziali (quelli cioè che nascono dalle masse e dalle accelerazioni), tipo forza peso e/o forza centrifuga, le corrispondenti accelerazioni gravitazionali e centripete andranno espresse non più in metri al secondo quadrato ma in millimetri al secondo quadrato.

Nel tentativo di evitare all'utente inesperto questi errori (che possono essere gravissimi) molti dei codici di calcolo nati più recentemente hanno introdotto l'uso delle unità di misura. L'utente può allora scegliere tra vari sistemi di unità omogenee. Spessissimo infatti si trovano delle immagini con i fondoscala degli stress in mMPa (sì, proprio milli-mega-Pascal: troppo semplice indicare i kPa, chilo-Pascal!); e questo perché un metodo per ovviare all'inconveniente visto è quello di esprimere le forze in mN (milli-Newton).

Per fortuna dei più esperti, per ora questi codici di calcolo non hanno ancora preso del tutto il sopravvento sull'utente; è ancora possibile quindi "forzarli" a utilizzare i numeri che ognuno preferisce, assumendosi la responsabilità della scelta.

Un altro tipo di errore di "input da tastiera" è l'errata assegnazione del valore di spessore agli elementi shell o agli elementi a tensione piana; per evitare questi errori il solo sistema è quello di ricontrollare attentamente il modello e, sempre buona norma, cercare già di avere un'idea dell'ordine di grandezza dei risultati attesi (ad esempio il valore delle sollecitazioni), magari con calcoli manuali di prima approssimazione.

Chiaramente l'utente può anche sbagliare negli "input da mouse" e quindi assegnare forze, reazioni vincolari, carichi termici, pressioni ai nodi e agli elementi sbagliati; anche in questi casi il sistema principale di controllo è un'attenta indagine del modello, salvo alcuni accorgimenti che vedremo nel Capitolo 9.

6.3 Gli errori di discretizzazione

6.3.1 Introduzione

L'errore di discretizzazione è intrinseco al FEM. Si è infatti detto (e ulteriori dettagli possono essere trovati in Appendice B) che il FEM fornisce una soluzione approssimata; tanto meno grossolana è la discretizzazione e tanto più accurati saranno i risultati prodotti. Sottolineiamo che qui con discretizzazione intendiamo il modo con cui una struttura viene approssimata: ci riferiamo quindi al tipo e al numero di elementi che si decidono di utilizzare per un dato modello.

6.3.2 Densità della mesh

Il numero di elementi viene qualitativamente indicato con "densità della mesh". Va detto che in generale la modellazione a elementi finiti tende a sovrastimare l'effettivo valore della rigidezza della struttura, e questo è tanto più vero quanto meno la mesh è densa. Questo fatto si traduce nella sottovalutazione dello stato di sollecitazione; vediamo perché.

6.3.2.1 Un caso limite

Noi sappiamo che un'asta sottoposta a una azione assiale F subisce una deformazione ε data da:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$