

Figura 6.38. Spostamento e sollecitazione longitudinale con trave caricata nel centro di taglio.

La figura 6.38 riporta i risultati per questa nuova condizione; ora la trave manifesta il tipico comportamento a flessione, ma i valori della sollecitazione longitudinale sono in accordo coi i risultati teorici solamente in mezzzeria, mentre all'incastro presentano ancora, sebbene in forma meno marcata, una variazione lungo la direzione trasversale, in questo caso si imputabile alla presenza dei vincoli.

Abbiamo già detto che alcuni pre/post-processor sono in grado di gestire le sezioni delle travi, calcolandone le caratteristiche inerziali a partire dalle dimensioni geometriche; molti si spingono oltre e, almeno per alcuni tipi di sezione, sono in grado di determinare il centro di taglio. Occorre tuttavia prestare molta attenzione a quanto fa poi il codice di calcolo, ossia è necessario verificare se la sezione venga o meno traslata nel centro di taglio o se venga lasciata sull'asse baricentrico; infatti, come abbiamo visto, i risultati possono cambiare molto, per alcune sezioni, nei due casi.

Infine sottolineiamo che nelle costruzioni di carpenteria le travi sono tra loro collegate (mediante chiodatura, bullonatura o saldatura) in modo che risulta impossibile far sì che i carichi di taglio siano applicati nei centri di torsione delle travi stesse. Pertanto generalmente questo tipo di travi sarà soggetto al fenomeno che abbiamo visto; una schematizzazione a elementi beam potrebbe filtrare questo effetto rendendo necessaria una accurata fase di interpretazione dei risultati, a valle del calcolo a elementi finiti.

6.3.3.6 Trave a grande curvatura

Nell'ultimo esempio di questo paragrafo vogliamo calcolare la trave della figura 6.39, sollecitata a un estremo con una forza $F = 300000$ N e incastrata all'altro. La sezione più sollecitata risulta essere quella che si trova alla distanza maggiore dalla retta di applicazione della forza F ; in questa sezione sono presenti una azione assiale pari a 300 kN e un momento flettente pari a 120000 kNmm.

Se supponiamo di considerare la trave come rettilinea (cioè come se l'altezza h della sezione fosse trascurabile rispetto al raggio r_0 di curvatura della fibra baricentrica) la tensione massima nella sezione più caricata vale:

$$\sigma = \pm \frac{F \cdot r_0}{I_{yy}} \cdot \frac{h}{2} + \frac{F}{A}$$

essendo $I_{yy} = 60000000 \text{ mm}^4$ e $A = 18000 \text{ mm}^2$, all'intradosso e all'estradosso della trave si ricavano i seguenti valori di sollecitazione:

$$\sigma_i = \frac{F \cdot r_0}{I_{yy}} \cdot \frac{h}{2} + \frac{F}{A} = 216.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = -\frac{F \cdot r_0}{I_{yy}} \cdot \frac{h}{2} + \frac{F}{A} = 183.3 \text{ MPa}$$

Tuttavia il valore di h è confrontabile con quello di r_0 e non è pertanto lecito considerare la trave come se fosse rettilinea. Uno degli effetti che si manifesta nelle travi a grande curvatura soggette a flessione è lo spostamento dell'asse neutro: in altre parole le fibre che vedono una tensione nulla non giacciono più sull'asse baricentrico; questo si traduce in una diversa distribuzione delle tensioni all'interno della sezione, che ne altera i valori minimi e massimi.

Nella sezione più sollecitata il valore dello sforzo in direzione tangenziale che si ottiene dalla teoria del secondo ordine valida per le travi a grande curvatura è dato dalla seguente relazione:

$$\sigma = \frac{F \cdot r_0}{A \cdot (r_0 - r_n)} \cdot \frac{r_n - r}{r} + \frac{F}{A}$$

dove r_n è il raggio che individua l'asse neutro rispetto al centro di curvatura e r è la generica coordinata radiale in cui si valuta la sollecitazione. Essendo:

$$r_n = \frac{r_e - r_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = 391.5 \text{ mm}$$

e ponendo $r = r_i = 300 \text{ mm}$ si ottiene il valore della tensione tangenziale all'intradosso della trave: $\sigma = 257 \text{ MPa}$.

Ponendo invece $r = r_e = 500 \text{ mm}$ si ottiene il valore della sollecitazione all'estradosso della trave: $\sigma = -154 \text{ MPa}$.

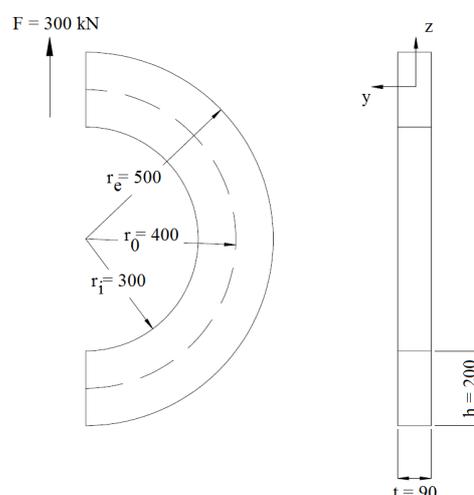


Figura 6.39. Trave a grande curvatura.

La marcata differenza che si registra nei due casi (trave rettilinea e trave curva) si commenta da sola. Volendo eseguire un calcolo numerico si potrebbe ingenuamente pensare che l'implementazione di un modello a elementi beam possa essere sufficiente a cogliere questo importante effetto: niente di più sbagliato. E di pericoloso.

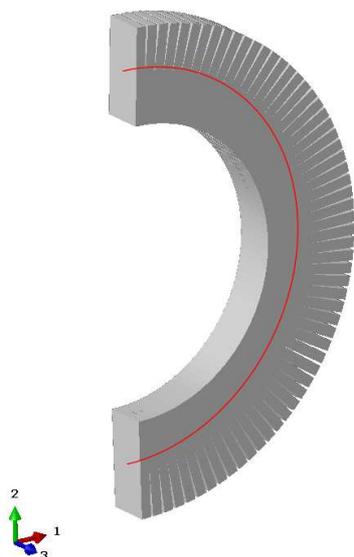


Figura 6.40. Modello a elementi beam per la trave a grande curvatura; in rosso sono rappresentati gli elementi. La sezione è centrata sul baricentro.

Costruiamo quindi il modello a elementi beam, in questo caso sfruttando le capacità del software di gestire una sezione rettangolare. La figura 6.40 riporta tale modello, mentre nella figura 6.41 illustriamo i risultati ottenuti.

Come si può vedere, l'accordo con i risultati ottenuti con la teoria del primo ordine è perfetto, come era lecito attendersi. Il fatto di aver sfruttato le capacità del codice di calcolo e del pre/post-processore di gestire le sezioni per gli elementi beam non consente di valicare il limite intrinseco di questo tipo di elemento.

Osserviamo poi lo spostamento che il punto di applicazione della forza subisce nella direzione della forza stessa: $u_2 = 2.49$ mm; questa informazione ci servirà per il confronto con il prossimo modello.

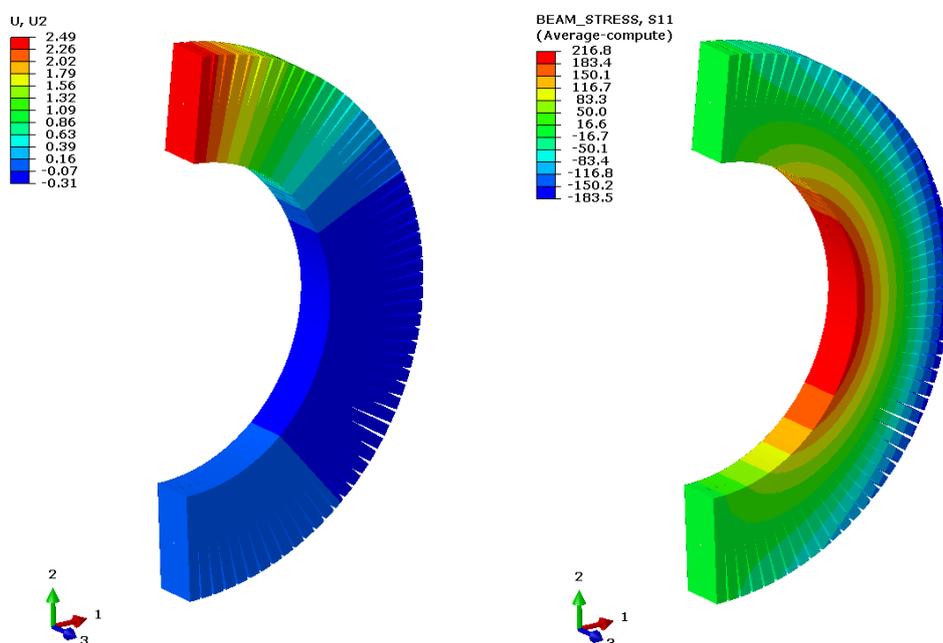


Figura 6.41. Spostamento in direzione verticale e sollecitazione lungo l'asse (curvilineo) della trave.

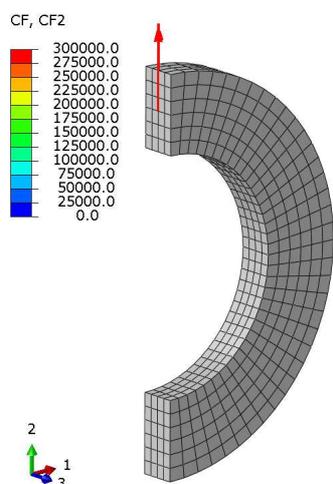


Figura 6.42. Modello a elementi brick per la trave a grande curvatura.

Costruiamo quindi, più realisticamente, un modello della trave utilizzando elementi brick (figura 6.42) a causa dell'elevato spessore (anche se si potevano impiegare elementi a deformazione piana) ed eseguiamo su di esso il calcolo. La figura 6.43 riporta l'andamento dello spostamento in direzione verticale e della sollecitazione circonferenziale in un sistema di riferimento cilindrico opportunamente costruito nel centro della corona circolare. Confrontando questi dati con il calcolo manuale eseguito in accordo con la teoria del secondo ordine si conclude che il modello a elementi brick è adeguato a cogliere l'effetto dello spostamento dell'asse neutro.

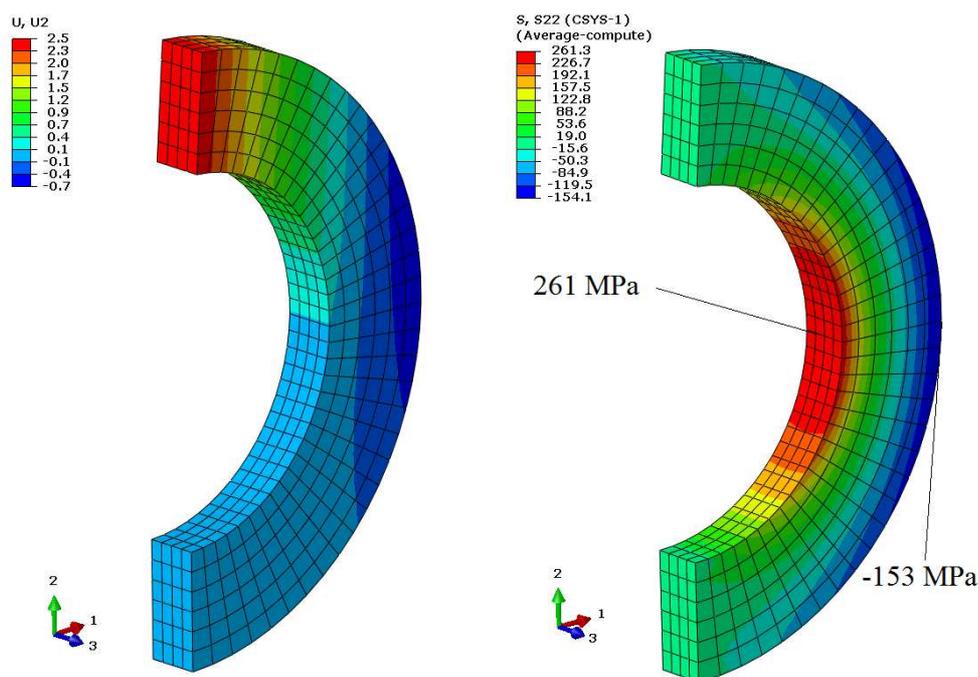


Figura 6.43. Spostamento in direzione verticale (a sinistra) e sollecitazione lungo la direzione circonferenziale di un sistema di riferimento cilindrico (a destra).

Una ulteriore considerazione riguarda lo spostamento del punto di applicazione della forza, che in questo caso vale: $u_z = 2.5$ mm.

Possiamo quindi affermare che, mentre l'errore commesso sugli spostamenti con il modello a elementi beam è praticamente nullo, a indicare come la rigidità della trave

fornita dal modello a elementi beam sia molto vicino al valore reale, l'errore sulla tensione massima è pari al 19%.

Giunti a questo punto si rende necessaria qualche osservazione. Mentre attraverso i modelli a elementi shell e a elementi brick è possibile tenere conto delle reali condizioni di vincolo, di carico e geometriche, permettendo di cogliere effetti quali la torsione, che potremmo definire "parassita", illustrata nell'esempio della trave con sezione a C, o lo spostamento dell'asse neutro, messo in luce con l'ultimo esempio, con gli elementi beam questo non è possibile a causa della loro formulazione matematica: come già detto (cfr. Capitolo 1) essi sono elementi monodimensionali che giacciono lungo l'asse baricentrico della trave che devono simulare; inoltre, salvo implementazioni particolari, essi si basano sulla teoria valida per le travi ad asse rettilineo. Un incremento della densità della mesh, che in altre circostanze porterebbe più vicini al risultato "esatto", in questo caso non servirebbe a nulla.

Tutto questo non significa affatto che gli elementi beam vadano banditi dalle analisi numeriche delle strutture, tutt'altro. La loro utilità è notevole e fuori discussione in numerosi casi, come ad esempio nelle analisi modali, dove fondamentali sono i valori delle rigidezze e delle masse, mentre meno importanti sono gli effetti locali, come abbiamo visto nel Capitolo 4. Qui si è voluto solamente richiamare l'attenzione sulla prudenza che è necessario adottare quando si vuole semplificare un calcolo riducendo la struttura da analizzare a una serie di "beam equivalenti": molti effetti importanti che influenzano i reali stati di deformazione e di sollecitazione possono andare persi, falsando completamente i risultati dell'analisi.

6.3.3.7 La tecnica dello "skinning"

Nonostante la scelta dell'elemento brick per la trave a grande curvatura sia quella più corretta, anche questo tipo di elemento ha degli errori intrinseci. Vediamo quali.

Nella figura 6.44 illustriamo le tre tensioni principali per l'elemento estratto all'intradosso della trave a grande curvatura nella sezione maggiormente sollecitata. La rappresentazione avviene tramite delle frecce che indicano intensità e verso delle grandezze in esame (nei punti di Gauss; questo è il motivo per cui il valore nella figura in alto a destra è minore di quanto riportato nella figura 6.43 - cfr. § 3.9.5).

Come si può vedere, e come peraltro sappiamo, le tre sollecitazioni principali sono ortogonali tra loro. Tuttavia ci aspettiamo che, almeno sulla faccia "libera" dell'elemento considerato (quella cioè a contatto con l'aria), la tensione principale intermedia sia nulla, perché sulla superficie di un solido non soggetto a pressioni, lo stato di sforzo deve essere piano per l'equilibrio. Ma così non è. E questo è un "errore" intrinseco al FEM: le equazioni indefinite di equilibrio (cfr. Appendice B) non sono sempre rispettate. Va tuttavia detto che le equazioni di equilibrio delle forze nei nodi che collegano tra loro gli elementi sono invece rispettate.

Questo errore tende a diminuire quanto più fitta è la mesh; se infatti raddoppiamo il numero di elementi in direzione radiale otteniamo i risultati della figura 6.45, dove il valore della tensione principale intermedia si è quasi dimezzato.