e la rigidezza della struttura vale proprio k. Avendo a che fare in questo caso con un solo grado di libertà, se u = 1 (spostamento unitario) si ottiene che k = F, cioè k rappresenta la forza con cui la molla reagisce all'imposizione di uno spostamento unitario.

Ricordiamo poi che [K] è una matrice simmetrica e quindi $K_{ij} = K_{ji}$.

Va poi sottolineato che se la struttura è dotata di n gradi di libertà, la matrice di rigidezza globale ha dimensioni n x n.

7.2.1 I superelementi

Il Metodo degli Elementi Finiti ha delle origini teoriche che possono essere fatte risalire agli inizi del '900; tuttavia ci si rese conto che, perché esso potesse avere una utilità pratica, era necessario disporre di uno strumento in grado di risolvere sistemi di equazioni di dimensioni considerevoli. I primi calcolatori però avevano capacità, anche in termini di memoria, piuttosto basse. Pertanto il numero di equazioni, e quindi di gradi di libertà, che costituivano il sistema da risolvere non poteva essere molto elevato.

Si ricorreva allora frequentemente a un artificio per avere risultati attendibili nelle zone di interesse, dove la mesh deve essere adeguatamente fitta (cfr. Capitolo 6), mantenendo nel complesso la dimensione di [K] al disotto delle capacità dell'elaboratore.

L'espediente consiste nel dividere in sottoinsiemi la struttura completa oggetto dell'analisi; per ognuno di questi blocchi si crea un modello a elementi finiti che abbia i nodi giacenti sulle linee (o sulle superfici) di separazione coincidenti con quelli del sottogruppo attiguo; per ogni blocco si determina poi una "matrice di rigidezza ridotta" ai nodi di interfaccia che rappresenta il comportamento elastico, nei punti in cui viene calcolata, della sottostruttura a cui essa si riferisce (questo metodo è noto anche come "tecnica dei superelementi").

Facciamo un esempio: si abbia a disposizione un calcolatore in grado di risolvere al massimo un sistema di ordine 12000 (12000 gradi di libertà); questo significa che, se utilizziamo elementi i cui nodi abbiano 6 gradi di libertà ciascuno (come ad esempio gli elementi shell e gli elementi beam), possiamo utilizzare al massimo 2000 nodi per modellare la struttura da analizzare; supponiamo poi che una mesh soddisfacente porti ad avere 3000 nodi senza ulteriori possibilità di riduzione (per non penalizzare troppo l'accuratezza dei risultati), ma che possa essere agevolmente divisa in due parti, ciascuna approssimativamente costituita da 1500 nodi, lungo una linea su cui giacciono ad esempio 20 nodi. Con queste ipotesi non siamo in grado di risolvere il problema per intero ma possiamo gestire separatamente i due gruppi, a patto di tenere conto del fatto che i due superelementi sono tra loro collegati attraverso quei 20 nodi.

Al giorno d'oggi, come si diceva poco più sopra, grazie alla sempre crescente disponibilità di calcolatori via via più potenti e al tempo stesso economici, questo problema è molto meno sentito, dato che è possibile risolvere agevolmente anche strutture con alcuni milioni di gradi di libertà.

Tuttavia la tecnica dei superelementi può essere utilizzata proficuamente ad esempio quando due Aziende diverse (che magari utilizzano due codici di calcolo differenti) stanno analizzando due parti di una stessa struttura che sono tra loro interfacciate: per verificare separatamente e in modo corretto i due sottoinsiemi è sufficiente scambiarsi le rispettive matrici di rigidezza ridotte ai punti di interfaccia. Alla luce di questo importante aspetto nel seguito illustreremo come sia possibile ricavare tale matrice, qualora il codice di calcolo di cui si dispone non sia in grado di effettuare le operazioni necessarie in modo automatico, e quali siano le differenze nel caso in cui si decidesse di trascurare una delle due parti della struttura, vincolando il gruppo di interesse nei punti di interfaccia, ad esempio con incastri (operazione, questa, che porterebbe ad avere rigidezze teoricamente infinite in tali nodi).

7.2.2 Un esempio applicativo

La struttura che ci proponiamo di analizzare sia il supporto rappresentato in figura 7.1; esso è collegato, lungo la piastra verticale, a una lamiera attraverso tre bulloni; la lamiera a sua volta è saldata lungo i suoi lati verticali a una struttura molto rigida. Il supporto è caricato in corrispondenza dei due fori situati nella piastra orizzontale con due forze agenti lungo la direzione verticale, orientate verso l'alto e di modulo pari a 30 kN. La mensola è costituita da elementi brick, la lamiera è stata modellata con elementi shell, dato il basso valore dello spessore rispetto alle altre dimensioni, mentre le viti sono state schematizzate con elementi di tipo MPC rigidi. Dato poi che, come abbiamo detto, la lamiera è saldata a una struttura molto rigida, possiamo imporre ai nodi che giacciono lungo i suoi contorni verticali dei vincoli di incastro a terra (vedere figura 7.1).

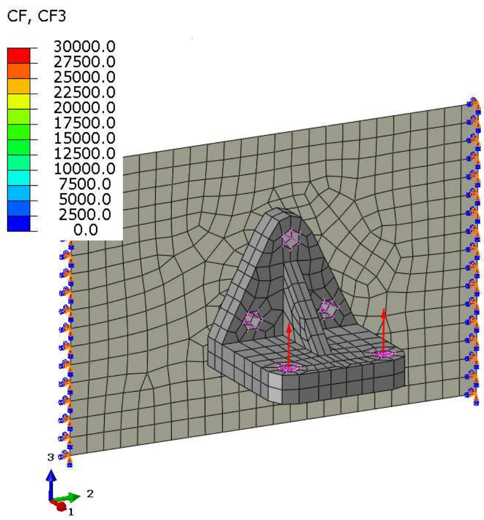

Figura 7.1. Modello a elementi finiti di un supporto. Si osservino i vincoli lungo gli spigoli verticali della lamiera e le raggiere di elementi MPC in corrispondenza dei fori.

In figura 7.2 sono riportati i risultati dell'analisi a elementi finiti della struttura completa, in termini di spostamenti in direzione z e di tensione equivalente di Von Mises per il solo supporto.

Supponiamo ora di non conoscere nulla della lamiera (né le dimensioni né il materiale), in quanto questa viene progettata da terzi, e di dover comunque effettuare una analisi strutturale sulla mensola.

L'unica cosa che si può fare con queste ipotesi è quella di incastrare a terra i tre nodi alle estremità delle viti, come illustrato in figura 7.3, e di procedere nel calcolo.

La figura 7.4, analoga alla figura 7.2 riporta i risultati del calcolo condotto sulla mensola incastrata.