APPENDICE B
La matrice di rigidezza per l'elemento a 3 nodi in regime di sforzo piano

B.1 Introduzione

Come già detto in altre parti del testo, il risultato di un problema strutturale elastico-lineare ottenuto con il FEM, una volta che sia stata definita la struttura da calcolare (geometria, materiali, vincoli interni, condizioni al contorno), altro non è che la soluzione della seguente equazione matriciale:

$$\{u\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \qquad \text{(B.1)}$$

essendo {u} il vettore degli spostamenti (incogniti) di punti predefiniti, i nodi, della struttura, {F} il vettore delle forze applicate in alcuni nodi (o anche in tutti), [K] la cosiddetta matrice di rigidezza globale della struttura stessa.

B.2 Gli Elementi Finiti

Come accennato nel Capitolo 1 gli elementi finiti sono dei domini nello spazio (da 1 a 3 dimensioni a seconda del tipo di elemento) all'interno dei quali la soluzione del problema elastico viene approssimata. Appare pertanto chiaro che tanto più piccoli (e quindi tanto più numerosi) sono gli elementi che modellano la struttura tanto migliore sarà l'accuratezza della soluzione; al limite teorico, un numero infinito di elementi finiti garantisce il risultato esatto. È quindi l'esperienza dello strutturista che interviene nello stabilire quale "densità" di elementi è idonea a fornire un valore ingegneristicamente corretto per un dato problema. Per poter risolvere la (B.1) è necessario conoscere la matrice [K] che, come abbiamo detto, è funzione della geometria e del materiale che costituisce la struttura. La matrice [K] viene costruita dal codice di calcolo assemblando in maniera opportuna le varie matrici [K_e] dei singoli elementi in cui è stata suddivisa l'intera struttura.

Nei paragrafi che seguono vedremo come si determina [K_e] per un elemento triangolare a 3 nodi in stato di sforzo piano.

B.3 Le funzioni di forma per l'elemento triangolare in stato di sforzo piano

Le funzioni di forma sono dei polinomi che descrivono il campo degli spostamenti dei punti all'interno dell'elemento in relazione agli spostamenti che i nodi dell'elemento stesso subiscono.

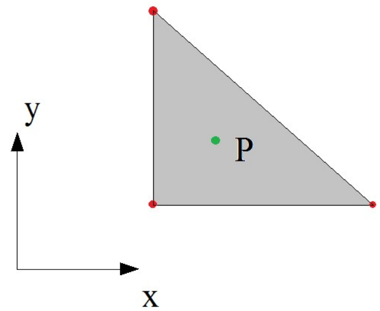

Figura B.1. Punto P appartenente ad un elemento triangolare in stato di sforzo piano.

Il grado di questo polinomio dipende dal numero dei nodi (oltre ai nodi ai vertici infatti possono aversi elementi con nodi lungo i lati). Più elevato è il grado del polinomio migliore generalmente risulta il comportamento dell'elemento, come sarà più chiaro nel seguito.

Si consideri un punto P appartenente a un elemento triangolare a 3 nodi (vedere figura B.1).

Per il punto P in questione potremo scrivere (vedere anche § 7.3):

$$u_x(P) = a_1 + a_2x + a_3y$$
$$u_y(P) = a_4 + a_5x + a_6y \qquad \text{(B.2)}$$

dove x e y sono le coordinate del punto P ed a_i (i = 1....6) sono delle costanti da determinarsi nel seguente modo.

Se supponiamo di conoscere le componenti dello spostamento dei nodi dell'elemento, in virtù delle (B.2), avremo:

$$\begin{aligned}
u_{1x} &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 \\
u_{1y} &= a_4 + a_5x_1 + a_6y_1 \\
u_{2x} &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 \\
u_{2y} &= a_4 + a_5x_2 + a_6y_2 \\
u_{3x} &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 \\
u_{3y} &= a_4 + a_5x_3 + a_6y_3
\end{aligned}$$

dove u_{jx} e u_{jy} (j = 1...3) sono le componenti dello spostamento del nodo j, x_j, y_j sono le coordinate del nodo j.

In forma matriciale scriveremo:

$$\{u_{nod}\} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \{a\}$$

$$\{u_{nod}\} = [N] \cdot \{a\}$$

da cui ricaviamo:

$$\{a\} = [N]^{-1} \cdot \{u_{nod}\} = [\Phi] \cdot \{u_{nod}\}$$

Scrivendo la matrice [Φ] in modo da esplicitare le righe avremo:

$$\{a\} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} \cdot \{u_{nod}\} \qquad \text{(B.3)}$$

Sostituendo le (B.2) nelle (A.11) (cfr. Appendice A) ed eseguendo le derivate otteniamo le componenti del tensore di deformazione:

$$\varepsilon_x = a_2$$
$$\varepsilon_y = a_6$$
$$\gamma_{xy} = a_3 + a_5$$

Dato che le a_i sono delle costanti rimane chiaro come mai questo tipo di elemento venga chiamato Constant Strain Triangle (CST). Pertanto per poter cogliere adeguatamente il campo delle deformazioni in una struttura modellata con questo elemento è necessario utilizzarne un grande numero. Elementi con polinomi contenenti anche forme quadratiche (ad esempio il triangolo a 6 nodi) vedrebbero un campo di deformazione variabile all'interno dell'elemento stesso, garantendo una migliore sensibilità ai gradienti di sforzo.

Dato che, in virtù delle (B.3), abbiamo:

$$\{a_2\} = \{\Phi_2\} \cdot \{u_{nod}\}$$
$$\{a_3\} = \{\Phi_3\} \cdot \{u_{nod}\}$$
$$\{a_5\} = \{\Phi_5\} \cdot \{u_{nod}\}$$
$$\{a_6\} = \{\Phi_6\} \cdot \{u_{nod}\}$$

potremo scrivere:

$$\varepsilon_x = \{\Phi_2\} \cdot \{u_{nod}\}$$
$$\varepsilon_y = \{\Phi_6\} \cdot \{u_{nod}\}$$
$$\gamma_{xy} = \{\Phi_3 + \Phi_5\} \cdot \{u_{nod}\}$$

o, in forma più compatta:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_6 \\ \Phi_3 + \Phi_5 \end{bmatrix} \cdot \{u_{nod}\} = [B] \cdot \{u_{nod}\} \qquad \text{(B.4)}$$

B.4 La matrice di rigidezza per l'elemento CST

Per determinare la matrice di rigidezza dell'elemento in oggetto ci serviremo di un metodo energetico, partendo da un semplice esempio.

Il lavoro esterno necessario per spostare l'estremo di una molla di rigidezza k (essendo l'altro estremo vincolato) della quantità x vale:

$$L_e = \int_0^x k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Analogamente, essendo $[K_e]$ la matrice (ancora da definire) di un elemento, il lavoro delle forze esterne necessario a imporre gli spostamenti nodali $\{u_{nod}\}$ sarà:

$$L_e = \frac{1}{2} \cdot \{u_{nod}\}^T \cdot [K_e] \cdot \{u_{nod}\}$$

mentre il lavoro delle forze interne è dato dalla seguente relazione:

$$L_i = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon\} \cdot dV$$

Ma per la (A.10) (cfr. Appendice A):

$$L_i = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot [E]^T \cdot \{\varepsilon\} \cdot dV$$

Da ultimo, per la (B.4):

$$L_i = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{u_{nod}\}^T \cdot [B]^T \cdot [E]^T \cdot [B] \cdot \{u_{nod}\} \cdot dV$$

È facile rendersi conto che nessuno dei termini sotto il segno di integrale dipende dal dominio di integrazione e pertanto l'integrale è esteso al solo termine dV; inoltre, per il Principio dei Lavori Virtuali, deve essere $L_e = L_i$.